

SCIENCES SUP

Exercices & Problèmes

Licence • Écoles d'ingénieurs

MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR

- ▶ **Rappels de cours**
- ▶ **Méthodes**
- ▶ **Exercices et problèmes
avec corrigés détaillés**

*Yves Leroyer
Patrice Tesson*

DUNOD

MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR

- ▶ **Rappels de cours**
- ▶ **Méthodes**
- ▶ **Exercices et problèmes
avec corrigés détaillés**

Consultez nos parutions sur dunod.com

The screenshot shows the Dunod website interface. At the top, there is a navigation bar with the Dunod logo and the text "Éditions ETSF, Hachette, Microsoft Press, ETSF, Éditions, InÉditions". Below this is a search bar and a navigation menu with categories like "Sciences et techniques", "Informatique", "Gestion et Management", and "Sciences humaines". The main content area is divided into several sections:

- Interviews:** Features articles such as "Réaliser les BI (urgence)" by Gilles Vermeir and "Baccus 2008 : espère la nouvelle formule?" by Thierry de Montfort.
- Books:** Promotes titles like "Bacchus 2008" (Enjeux, stratégies et pratiques dans la filière vitivinicole) by Jean-Pierre Couderc, Hervé Halmir, Françoise d'Hautville, and Etienne Montagne; "Profession dirigeant" (De la conception du changement à l'action) by Gérard Roth and Michal Kuryka; "Python" (Petit guide à l'usage du développeur agile) by Tarek Zaaf; and "150 petites expériences de psychologie du sport" by Yann Paquet, Pascal Legrain, Elisabeth Rosinet, Stéphanie Rusinek, and others.
- Services:** Includes "Bibliothèque des métiers" (Library of professions) and "Les newsletters" (Newsletters).

The footer contains the text "Bibliothèque des métiers", "newsletters", "Microsoft Press", "Éditions ETSF", "etsf.com", "capitales.com", and "Robbe Mykle".

MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR

- ▶ Rappels de cours
- ▶ Méthodes
- ▶ Exercices et problèmes
avec corrigés détaillés

Yves Leroyer

Professeur à l'École Nationale Supérieure d'Électronique, d'Informatique
et de Radiocommunications de Bordeaux (ENSEIRB)

Patrice Tesson

Professeur agrégé à l'École Nationale Supérieure d'Électronique, d'Informatique
et de Radiocommunications de Bordeaux (ENSEIRB)

DUNOD

Illustration de couverture : *digitalvision*[®]

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2009

ISBN 978-2-10-053937-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	viii
NOTATIONS	ix
CHAPITRE 1 • OUTILS MATHÉMATIQUES DE BASE	1
Rappels de cours	1
1.1 Rappels d'analyse 1.2 Les fonctions utilisées en physique 1.3 Les Séries de Fourier 1.4 Les fonctions définies par des intégrales	
Énoncés des exercices	9
Énoncés des problèmes	13
Du mal à démarrer ?	15
Corrigés des exercices	17
Corrigés des problèmes	34
CHAPITRE 2 • TRANSFORMATION DE FOURIER	41
Rappels de cours	41
Énoncés des exercices	43
Énoncés des problèmes	45
Du mal à démarrer ?	49
Corrigés des exercices	50
Corrigés des problèmes	58
CHAPITRE 3 • TRANSFORMATION DE LAPLACE	66
Rappels de cours	66
Énoncés des exercices	68
Énoncés des problèmes	70
Du mal à démarrer ?	73
Corrigés des exercices	75
Corrigés des problèmes	84

Table des matières

CHAPITRE 4 • INTÉGRALES COMPLEXES ; THÉORÈME DES RÉSIDUS	95
Rappels de cours	95
Énoncés des problèmes	97
Du mal à démarrer ?	102
Corrigés des problèmes	103
CHAPITRE 5 • DISTRIBUTIONS	124
Rappels de cours	124
Énoncés des exercices	126
Énoncés des problèmes	128
Du mal à démarrer ?	131
Corrigés des exercices	132
Corrigés des problèmes	139
CHAPITRE 6 • FILTRES ET CAUSALITÉ	148
Rappels de cours	148
Énoncés des problèmes	149
Du mal à démarrer ?	153
Corrigés des problèmes	154
CHAPITRE 7 • FONCTIONS DE BESSEL	165
Rappels de cours	165
Énoncés des exercices	166
Énoncés des problèmes	169
Du mal à démarrer ?	176
Corrigés des exercices	177
Corrigés des problèmes	185
CHAPITRE 8 • FONCTIONS ORTHOGONALES	196
Rappels de cours	196
Énoncés des problèmes	197
Du mal à démarrer ?	204

Table des matières

Corrigés des problèmes	205
CHAPITRE 9 • ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES . . .	221
Rappels de cours	221
9.1 Les équations différentielles linéaires 9.2 Équations aux dérivées partielles	
Énoncés des problèmes	224
Du mal à démarrer ?	229
Corrigés des problèmes	230
BIBLIOGRAPHIE	248
INDEX	249

AVANT-PROPOS

Ce livre est un recueil d'exercices et de problèmes dans les grands secteurs des mathématiques pour l'ingénieur. Il s'adresse aux étudiants de troisième année de Licence de physique et d'EEA ainsi qu'aux élèves des écoles d'ingénieurs. Il est le fruit d'un enseignement de mathématiques pour l'ingénieur dispensé en première année de l'École Nationale Supérieure d'Électronique, d'Informatique et de Radiocommunication de Bordeaux (ENSEIRB).

Nous avons pris le parti de privilégier l'exposé des méthodes de calcul et de recherche des solutions en laissant parfois le soin au lecteur d'établir par lui-même la justification mathématique de telle ou telle étape (convergence uniforme d'intégrales ou de séries, permutation d'intégrales...). Dans la plupart des chapitres, des exercices permettent de se familiariser avec les méthodes de calcul. Les problèmes sont plus structurés, plus approfondis et surtout orientés vers les applications en physique de l'ingénieur. Certains peuvent constituer des « mini-projets » et être poursuivis par des calculs sur ordinateur (il est fait référence dans quelques problèmes à des prolongements sous Maple).

Le chapitre 1 rappelle et présente des notions qui seront utilisées dans la suite de l'ouvrage. La distribution de Dirac δ est exposée selon l'approche « phénoménologique » usuelle pour les physiciens qui permet une utilisation simple et extensive. L'étude plus rigoureuse des distributions fait l'objet du chapitre 5 (Distributions). Les chapitres 2 et 3 sont consacrés aux transformations intégrales de Fourier et de Laplace et à leurs applications en physique pour l'ingénieur, avec notamment au chapitre 3 plusieurs problèmes sur l'étude des lignes de transmission. Le chapitre 4 est consacré à l'étude des fonctions d'une variable complexe avec une orientation particulière vers le calcul d'intégrales. Ces notions sur les fonctions analytiques introduites au chapitre 4 et sur les distributions étudiées au chapitre 5 trouvent un prolongement au chapitre 6 où elles sont appliquées à la description du principe de causalité en physique et à la modélisation des filtres linéaires : relations de Kramers-Kronig, filtres à phase minimale, relations de Bayard-Bode, théorème de Paley-Wiener. Les fonctions de Bessel, chapitre 7, et les polynômes orthogonaux, chapitre 8, sont étudiés en vue de leur application à la résolution d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles (chapitre 9).

Cet ouvrage ne prétend pas à l'exhaustivité et certains domaines des mathématiques pour la physique n'y sont pas traités : la théorie des groupes dont les applications sont d'un niveau technique plus avancé, le calcul matriciel qui pour l'ingénieur ressort maintenant davantage du calcul sur ordinateur avec des outils comme Matlab, le calcul variationnel, dont le champ d'application est plus restreint.

La plupart des exercices et problèmes originaux de cet ouvrage sont l'œuvre d'une longue collaboration au sein de laquelle nous tenons à remercier plus particulièrement Bernard Morand, Michel Daumens, Michel Hontebeyrie et Pierre Minnaert.

NOTATIONS

		page
Espaces		
\mathbb{N}, \mathbb{Z}	Entiers naturels, entiers relatifs	
\mathbb{R}, \mathbb{C}	Nombres réels, nombres complexes	
$\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2$	Fonctions sommables, de carré sommable	5
\mathcal{L}_{loc}^1	Fonctions localement sommables	5
\mathcal{S}	Fonctions à décroissance rapide	124
\mathcal{S}'	Distributions tempérées	124
Fonctions		
u	Fonction échelon de Heaviside	4
\ln, \log	Logarithme népérien, logarithme complexe	
Π_T	Fonction « porte »	6
Λ_T	Fonction « triangle »	6
sign	Fonction « signe »	6
sinc	Fonction sinus cardinal	6
Γ, B	Fonctions eulériennes	8
J_n, N_n, H_n	Fonctions de Bessel, Neumann, Hankel	165
I_n, K_n	Fonctions de Bessel modifiées	165
Distributions		
$\langle T, \phi \rangle$	Action d'une distribution T sur une fonction test ϕ	124
δ	Dirac (distribution de, impulsion de)	6, 124
III	Peigne de Dirac	124
$\text{Pf } \frac{1}{x}$	Pseudo-fonction $\frac{1}{x}$	124
$[f]^x$	Distribution régulière associée à la fonction f	124
Transformations		
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$	Transformation de Fourier directe, inverse	41
$\mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1}$	Transformation de Laplace directe, inverse	66
Divers		
\bar{z}	Conjugué complexe de z	
fonction de classe C^k	Fonction k fois continuellement dérivable	4
fonction de classe \mathcal{L}	Fonction localement sommable et de classe exponentielle	66
$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$	Constante d'Euler = 0,577...	
$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	Coefficient du binôme	

OUTILS MATHÉMATIQUES DE BASE

1

RAPPELS DE COURS

1.1 RAPPELS D'ANALYSE

a) Intégrales généralisées

Définitions

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx \text{ si } f \text{ non bornée en } x = a$$

Si ces limites existent, on dit que l'intégrale correspondante converge (ou est convergente), sinon elle diverge (ou est divergente).

Exemple

l'intégrale de Riemann (dans les deux cas ci-dessous on a $a > 0$) :

- à l'infini $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si $\alpha > 1$ et diverge sinon
- en zéro $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si $\alpha < 1$ et diverge sinon.

On en déduit un *critère de convergence* très utile :

- si pour $x \sim \infty$ on a : $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ alors l'intégrale $\int_a^\infty f(x)dx$ converge si $\alpha > 1$ et diverge sinon ;
- si pour $x \sim 0$ on a : $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ alors l'intégrale $\int_0^a f(x)dx$ converge si $\alpha < 1$ et diverge sinon.

Par extension on définit (définition au sens standard)

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{R' \rightarrow \infty} \int_{-R'}^c f(x)dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_c^R f(x)dx \text{ pour } c \text{ borné quelconque.}$$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon'}^b f(x)dx \text{ si } f \text{ non bornée en } x = c \in]a, b[$$

Chapitre 1 • Outils mathématiques de base

On utilise souvent une définition alternative de ces intégrales généralisées dite au sens de la *partie principale* (ou valeur principale) de Cauchy

$$\begin{aligned} \text{PP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \\ \text{PP} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right\} \text{ si } f \text{ non bornée en } x = c \in]a, b[\end{aligned}$$

Si l'intégrale converge au sens standard elle converge aussi en partie principale et les deux définitions donnent la même valeur de l'intégrale. Une intégrale peut converger en PP sans converger au sens standard.

b) Séries

Séries numériques

On appelle somme partielle de rang N d'une série numérique de terme général u_n la somme :

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n$$

La série converge et a pour somme S si la suite S_N a une limite bornée : $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ et on note :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Une *condition nécessaire* de convergence est que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$; la convergence de la série de terme général $|u_n|$ entraîne celle de la série de terme général u_n qui est alors qualifiée d'*absolument convergente*.

Exemples

1. soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ (fonction ζ de Riemann) ; cette fonction est définie (ie la série converge) pour $x > 1$;

2. la *série géométrique* de raison q : $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ est convergente pour $|q| < 1$ et a pour somme $\frac{1}{1-q}$.

• Critères de convergence pour une série à termes positifs ($u_n \geq 0$) :

◇ critère de d'Alembert : soit $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si $L < 1$ la série converge ; si $L > 1$ la série diverge ;

- ◇ critère de Cauchy : soit $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{1/n}$. Si $L < 1$ la série converge ; si $L > 1$ la série diverge ;
- ◇ critère de comparaison : si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = L$ avec $0 < L < \infty$ alors les deux séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

Pour une série alternée $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n > 0$ on a le critère de Leibniz : si à partir d'un rang N la suite a_n est monotone décroissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (condition nécessaire) alors la série converge.

Séries de fonctions

Le terme général est une fonction : $x \rightarrow u_n(x)$. De ce fait la somme de la série est aussi une fonction $x \rightarrow S(x)$. À x fixé on est ramené à une série numérique. La convergence de la série est alors assujettie à la valeur de la variable (convergence simple). On parle de *domaine de convergence*.

S'il existe une série numérique *convergente* à termes positifs a_n telle qu'à partir d'un rang N on a $|u_n(x)| \leq a_n \forall x \in [a, b]$ alors la série de terme général $u_n(x)$ est *uniformément (et absolument) convergente* dans $[a, b]$ et la somme de la série est une fonction continue dans cet intervalle (critère de Weierstrass).

- *Cas particulier : les séries entières* $u_n(x) = a_n x^n$

Le domaine de convergence est l'intervalle $] -R, R[$ où $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ est appelé *rayon de convergence* de la série (dans \mathbb{C} le domaine de convergence est un disque de rayon R). Dans le domaine de convergence la somme d'une série entière est une fonction continue. La série est dérivable et intégrable terme à terme.

Exemples de séries entières

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad |x| < \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad |x| < 1 \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad |x| < \infty \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad |x| < \infty \end{array} \right.$$

c) Équations différentielles

Il existe des méthodes générales de résolution dans un petit nombre de cas rappelés ci-dessous :

Chapitre 1 · Outils mathématiques de base

- *Équations du premier ordre* $F(x, y, y') = 0$
- les équations aux variables séparables : l'équation peut être mise sous la forme $f(y)dy = g(x)dx$ et intégrée directement ;
- les équations linéaires : elles sont de la forme

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)$$

la solution générale est de la forme : $y(x) = \alpha y_1(x) + y_0(x)$ où $y_1(x) = \exp \left[- \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx \right]$ est une solution de l'équation sans second membre, α une constante arbitraire et $y_0(x)$ une solution particulière de l'équation complète, qui peut s'obtenir par *variation de la constante* :
$$y_0(x) = y_1(x) \int^x \frac{f(x')}{a_0(x')y_1(x')} dx'.$$

- *Équations linéaires du second ordre à coefficients constants*

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$$

L'équation sans second membre se résout en posant $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est déterminé par identification. La solution particulière de l'équation complète s'obtient par identification selon la forme du second membre ou par la méthode de variation de la constante.

1.2 LES FONCTIONS UTILISÉES EN PHYSIQUE

- *Fonctions continues ou continues par morceaux, à dérivées continues ou continues par morceaux*

Une fonction est de classe \mathcal{C}^k sur un intervalle I (éventuellement \mathbb{R}) si elle est continue sur I ainsi que ses k premières dérivées. Une fonction \mathcal{C}^∞ est indéfiniment dérivable.

Une fonction continue par morceaux a des discontinuités de première espèce (de saut fini) et est continue sur les intervalles délimités par les discontinuités.

Exemples

1. la fonction valeur absolue $t \rightarrow |t|$ est \mathcal{C}^1 par morceaux car elle est continue (\mathcal{C}^0) et sa dérivée première est continue par morceaux ;
2. la fonction (ou échelon) de *Heaviside*

$$\begin{aligned} u : t \rightarrow u(t) &= 0 \text{ pour } t < 0 \\ &= 1 \text{ pour } t > 0 \end{aligned}$$

est continue par morceaux (ou \mathcal{C}^0 par morceaux) ;

3. les fonctions *causales* sont nulles pour $t < 0$. Elles satisfont l'identité $f = uf$ où u est la fonction de Heaviside.

1.2. Les fonctions utilisées en physique

- *Fonctions périodiques*

$\exists T > 0 : f(t + T) = f(t) \forall t$. Le plus petit réel positif T qui satisfait cette identité est la période de la fonction qui est alors qualifiée de T -périodique. Exemple : la fonction harmonique $t \rightarrow \exp\left(2i\pi\frac{t}{T}\right)$. La fréquence est définie par $\nu = \frac{1}{T}$ et la pulsation par $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$.

- *Fonctions caractérisées par leurs propriétés d'intégration*

- Les fonctions *sommables* (ou intégrables) sont celles dont l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$ est bornée. Elles forment un espace vectoriel noté \mathcal{L}^1 .

- Les fonctions de *carré sommable* sont celles dont l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt$ est bornée. Elles forment un espace vectoriel noté \mathcal{L}^2 . Ces fonctions modélisent en particulier les signaux d'énergie finie ou encore les fonctions d'ondes de la mécanique quantique.

- On peut définir plus généralement l'espace \mathcal{L}^k pour k quelconque dont les deux espaces \mathcal{L}^1 et \mathcal{L}^2 sont des cas particuliers très utilisés en physique et théorie du signal.

- Les fonctions *localement sommables* sont celles dont l'intégrale $\int_I |f(t)| dt$ est bornée sur tout intervalle I fermé borné. Elles forment un espace vectoriel noté \mathcal{L}_{loc}^1 . On utilise parfois \mathcal{L}_{loc}^2 l'ensemble des fonctions de carré localement sommable. Il est clair que les fonctions de \mathcal{L}^1 sont localement sommables (et celles de \mathcal{L}^2 de carré localement sommable).

- *Fonctions tempérées*

Ce sont les fonctions localement sommables et à croissance lente, c'est-à-dire celles qui croissent au plus comme une puissance (finie) de t . Autrement dit on peut trouver un entier N non négatif borné tel que $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^N} = 0$. Notons qu'une fonction décroissante à l'infini est forcément à croissance lente.

La plupart des fonctions utilisées en physique sont des fonctions tempérées.

- *Égalité presque partout*

On dit que deux fonctions f et g sont égales presque partout et on note $f \stackrel{pp}{=} g$ si $f(t) = g(t) \forall t$ sauf sur un ensemble dénombrable de valeurs de t (ensemble de mesure nulle). Par exemple la dérivée de la fonction de Heaviside est presque partout nulle. Les fonctions égales presque partout ont comme propriété :

$$f \stackrel{pp}{=} g \Leftrightarrow \int_I f(t) dt = \int_I g(t) dt \quad \forall I$$

Cette propriété entraîne que les éléments de \mathcal{L}^1 (de \mathcal{L}^2) sont en fait les classes d'équivalence des fonctions égales presque partout et (de carré) sommables.

Chapitre 1 • Outils mathématiques de base

• Modélisation des signaux impulsionnels

L'impulsion δ de Dirac (définition « phénoménologique » ; pour une théorie rigoureuse voir le chapitre 5).

$$\begin{aligned} \forall f \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t) dt &= f(a) \\ \forall f \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) f(t) dt &= (-1)^n f^{(n)}(0) \\ g(t)\delta(t-t_0) &= g(t_0)\delta(t-t_0) \\ \delta(at) &= \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad \text{en particulier } \delta(-t) = \delta(t) \end{aligned}$$

La notation $\forall f$ doit rester compatible avec l'existence des valeurs de f qui y apparaissent ($f(0)$, $f(a)$, $f'(0)$, ...).

Si f est discontinue en t_0 avec pour saut σ on peut écrire $f(t) = f_c(t) + \sigma u(t - t_0)$ où f_c est continue, alors :

$$\begin{aligned} \text{au sens des fonctions} &\rightarrow f'(t) = f'_c(t) \quad \text{presque partout} \\ \text{au sens des distributions} &\rightarrow f'(t) = f'_c(t) + \sigma \delta(t - t_0) \end{aligned}$$

En particulier, au sens des distributions $u'(t) = \delta(t)$.

• Formule de Leibniz sur la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de deux fonctions

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k [u(x)]^{(k)} [v(x)]^{(n-k)}$$

où C_n^k est le coefficient du binôme : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Définitions

Fonction de Heaviside : $u(t) = 0$ pour $t < 0$ $= 1$ pour $t > 1$
Fonction « signe » : $\text{sign}(t) = -1$ pour $t < 0$ $= 1$ pour $t > 0$ $= 2u(t) - 1$
Fonction « porte » : $\Pi_T(t) = 1$ pour $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ $= 0$ sinon
Fonction « triangle » : $\Lambda_T(t) = \left(1 - \frac{ t }{T}\right) u(T - t)$
Fonction sinus cardinal : $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

1.3 LES SÉRIES DE FOURIER

- f est une fonction T -périodique sommable sur tout intervalle Δ fermé de longueur T ; on note $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation fondamentale. On appelle *coefficient de Fourier* de f :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\Delta} f(t) e^{-in\omega t} dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

On définit la *série de Fourier* de f :

$$S_F(f; t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t}$$

- ◇ Si en $t_0 \in \Delta$, f et f' ont une valeur à droite et une valeur à gauche alors (théorème de Dirichlet)

$$S_F(f; t_0) = \frac{1}{2} [f(t_0^+) + f(t_0^-)]$$

- ◇ Si f est continue et f' continue par morceaux alors $S_F(f; t) = f(t)$ uniformément $\forall t$ et la série de Fourier de f' s'obtient en dérivant celle de f terme à terme.
- ◇ Si f est C^{k-1} et $f^{(k)}$ est continue par morceaux alors $|c_n| \simeq \frac{1}{n^{k+1}}$ pour n grand.
- Série de Fourier de fonctions *réelles* : f réelle $\Rightarrow c_{-n} = \overline{c_n}$ (complexe conjugué de c_n) ; alors

$$S_F(f; t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \Leftrightarrow \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{\Delta} f(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{\Delta} f(t) \cos n\omega t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{\Delta} f(t) \sin n\omega t dt$$

- On rappelle la *relation de Parseval* (pour $f \in \mathcal{L}^2(\Delta)$)

$$\frac{1}{T} \int_{\Delta} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

1.4 LES FONCTIONS DÉFINIES PAR DES INTÉGRALES

Quelques fonctions usuelles

<i>Fonctions eulériennes</i>	
La fonction Gamma $\Gamma(x)$	La fonction Bêta $B(x, y)$
$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad x \in \mathbb{R}^{**}$	Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^{**+2}$
$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^n t^{x-1} dt \quad x \in \mathbb{R}^{**}$	$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$
	$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} d\theta$
	$= \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$
$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$	
$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$	$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \forall x, y, x+y \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}^-\}$
$\Gamma'(1) = -\gamma \quad \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -(\gamma + \ln 4)\sqrt{\pi}$	
$\gamma = 0,577\dots \text{ constante d'Euler}$	
$\Gamma(n+1) = n! \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$	$B(x, 1-x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad x \notin \mathbb{Z}$

Toutes les fonctions ci-dessous sont définies sur \mathbb{R}^{**} ; certaines peuvent être prolongées sur \mathbb{R}^* ou même sur \mathbb{R} .

Fonction Erreur $\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$	Erreur complémentaire $\operatorname{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$
Sinus Intégral $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$	Exp^{elle} Intégrale E_n $E_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^n} dt \quad n \in \mathbb{N}^*$
Cosinus Intégral $\operatorname{Ci}(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$	Exp^{elle} Intégrale E_i $E_i(x) = PP \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$

Produit de convolution

$$f * g : t \rightarrow (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t') g(t') dt'$$

$$\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont causaux : } (f * g)(t) = u(t) \int_0^t f(t - t') g(t') dt'$$

On utilise couramment la notation (abusive) $f(t) * g(t)$.

• Propriétés

- symétrie : $f * g = g * f$
- si $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^1$ alors $f * g \in \mathcal{L}^1$
- si $f \in \mathcal{L}^1$ et g' est continue et bornée à l'infini alors $(f * g)' = f * g'$

ÉNONCÉS DES EXERCICES

1.1 Intégrales généralisées

1 Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$(a) : \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx \quad (b) : \int_{-1}^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}} dx$$

$$(c) : \int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x(x^3+1)}} dx \quad (d) : \int_0^\infty e^{-x} \cos x dx$$

2 Étudier en fonction de α la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx$

3 L'intégrale $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^3+1} dx$ est-elle convergente au sens standard ? au sens de la partie principale ? Si oui la calculer.

1.2 Séries

1 Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries :

$$(a) : \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad (b) : \sum_{n=0}^\infty \frac{2^n+1}{3^n+n} \quad (c) : \sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n}{n^2} \quad (d) : \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

2 Pour quelles valeurs de a la série de terme général $(1-a)^n$ est-elle convergente ? Calculer sa somme.

3 Calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}$.

- 4 Soit deux séries numériques absolument convergentes de terme général respectivement a_n et b_n . Montrer que la série de terme général $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ est uniformément convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.3 Équations différentielles

- 1 Résoudre les équations différentielles du premier ordre :

$$(a) y' + y^2 \sin x = 0 \text{ avec } y(0) = 1 \quad (b) y' = a^2 - y^2 \quad (c) (1+x)y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$$

- 2 Résoudre les équations différentielles du second ordre :

$$(a) y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x \quad (b) y'' + y = \ln |\cos x|$$

1.4 Impulsion de Dirac

- 1 Établir les propriétés suivantes de l'impulsion de Dirac :

$$(a) \int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \text{ si } t_0 \in]a, b[\text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

$$(b) \delta(at+b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$$

- 2 Calculer :

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} (2t+3)\delta(t+1)dt \quad (b) \int_0^{\infty} te^{-t^2}\delta(t+1)dt$$

$$(c) \int_{-1}^2 (t^3+3t^2)\delta'(t-1)dt \quad (d) \int_{-\infty}^{\infty} t \cos(t)\delta^{(n)}(t)dt$$

- 3 Calculer $t^n \delta^{(k)}(t)$. En déduire n solutions indépendantes au sens des distributions des équations :

$$t^n T = 0$$

$$t^n T = \delta$$

- 4 *Potentiel coulombien à une dimension :*

a) Calculer « au sens des distributions » la dérivée seconde de $x \mapsto |x|$.

b) On place une particule ponctuelle de charge q à l'origine ($x = 0$) dans un espace à une dimension (une ligne). Le potentiel créé par la charge à l'abscisse x est solution de l'équation de Poisson à une dimension

$$V''(x) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(x)$$

Trouver la solution de cette équation qui soit une fonction paire.

- c) On place sur la ligne une autre particule, de charge $-q$. À l'instant $t = 0$ elle est située en $x_0 \neq 0$ et possède une vitesse v_0 . Montrer que quelle que soit sa vitesse initiale v_0 elle ne peut pas échapper à l'attraction de la particule localisée en $x = 0$.

On rappelle que la force que ressent en x la particule de charge $-q$ plongée dans le potentiel $V(x)$ est : $F(x) = qV'(x)$.

1.5 Séries de Fourier; propriétés, dérivation

- 1 Développer en série de Fourier la fonction T -périodique suivante :

$$\begin{aligned} f(t) &= at & -T/2 \leq t \leq 0 \\ &= bt & 0 \leq t < T/2 \end{aligned}$$

où $|a| \neq |b|$. Discuter les cas $a = \pm b$.

- 2 Développer en série de Fourier la fonction T -périodique suivante :

$$\begin{aligned} g(t) &= a & -T/2 \leq t < 0 \\ &= b & 0 \leq t < T/2 \end{aligned}$$

- 3 Comment peut-on comparer ce résultat à celui de la question précédente ?

1.6 Série de Fourier et somme de séries

Développer en série de Fourier la fonction paire et 2π -périodique définie pour $t \in [0, \pi]$ par $f(t) = e^{-at}$.

En déduire la valeur de la somme des séries numériques :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \quad ; \quad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$

1.7 Série de Fourier

Développer en série de Fourier la fonction 2π -périodique définie par : $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ pour $-\pi \leq t < \pi$ avec $\omega_0 \in]0, 1[$. Que se passe-t-il quand $\omega_0 \rightarrow 1$?

1.8 Série de Fourier et équations différentielles

Trouver une solution particulière périodique de l'équation $y''(t) - 4y(t) = f(t)$ où f est 2π -périodique définie par $f(t) = |t|$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.

1.9 Séries de Fourier sinus et séries de Fourier cosinus

Soit f une fonction satisfaisant les critères de Dirichlet sur $]0, L[$. Construire une série de Fourier de périodes $2L$ ne comportant que des termes en sinus (cosinus) et qui coïncide avec f sur $]0, L[$.

Applications :

- Développer en série de Fourier-cosinus sur $[0, \pi]$ la fonction $f(t) = \sin t$.
- Construire la série de Fourier-sinus puis la série de Fourier-cosinus qui coïncident avec la fonction $t \rightarrow \cosh t$ sur $]0, 1[$.

1.10 Fonctions eulériennes

- 1 Calculer $\Gamma(\frac{5}{2})$, $\Gamma(2, -\frac{1}{2})$, $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ et en déduire $\Gamma(-n + \frac{1}{2})$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
- 2 Calculer $J_n = \int_0^\infty t^n e^{-at^2} \ln t dt$ ($n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^{**+}$) en termes de Γ et de Γ' .
Donner la valeur de J_0 et de J_1 .

1.11 Calcul d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

- 1 $I_1 = \int_0^\infty t^\alpha e^{-\beta t} dt$ ($\beta > 0, \alpha > -1$)
- 2 $I_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{\sqrt{t+b^2}} dt$ ($a, b > 0$)
- 3 $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$
- 4 $I_4(x) = \int_x^\infty e^{-(at^2+2bt+c)} dt$ ($a > 0$)
- 5 $I_5 = \int_0^{\pi/2} (\tan \theta)^\alpha d\theta$ ($\alpha \in]-1, 1[$)
- 6 $I_6 = \int_0^\infty \cos(pt) \text{Ci}(t) dt$
- 7 $I_7 = \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{t+b} dt$ ($a, b > 0$)
- 8 $I_8 = \int_\alpha^\beta \frac{e^{-at}}{t+b} dt$ ($a > 0; -b \notin [\alpha, \beta]$)
- 9 $I_9 = \int_1^\infty \frac{\sqrt{\ln t}}{t^2} dt$
- 10 $I_{10} = \int_0^\infty \frac{\sin at}{t+b} dt$ ($b > 0$)
- 11 $I_{11} = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^{2n}} dt$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- 12 $I_{12} = \int_0^3 (9-t^2)^{\frac{3}{2}} dt$

1.12 Produit de convolution

- 1 Calculer les produits de convolution $f * g$ (les fonctions Π_a et Λ_a ci-dessous sont définies dans le rappel de cours) :

- (a) $f(t) = \Pi_2(t)$ $g(t) = f(t)$
- (b) $f(t) = \Pi_2(t)$ $g(t) = 2\Lambda_2(t) = (2 - |t|) u(2 - |t|)$
- (c) $f(t) = \sin t$ $g(t) = a\Lambda_a(t) = (a - |t|) u(a - |t|)$ $a > 0$
- (d) $f_a(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} u(t)$ $a > 0$ $f_b(t) = \frac{1}{\Gamma(b)} t^{b-1} e^{-t} u(t)$ $b > 0$

- 2 Calculer $f * \delta^{(n)}$.

3 On désigne par f_a la fonction définie pour $a > 0$ par $f_a(t) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2a^2}$;

a) Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2 + \beta t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$

b) Calculer $f_a * f_b$.

c) Calculer $f_a^{*3} = f_a * f_a * f_a$ puis f_a^{*n} (n entier positif).

ÉNONCÉS DES PROBLÈMES

Problème 1.1 Équation de la chaleur

Trouver à l'aide des séries de Fourier la solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} u(x, t) & \text{ définie pour } x \in [0, l] \text{ et } t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} & = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta u \quad \alpha > 0 \quad ; \quad \beta > 0 \\ u(0, t) & = u(l, t) = 0 \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) & = x(l - x) \quad x \in [0, l] \end{aligned}$$

Problème 1.2 Séries de Fourier, polynômes de Bernouilli et fonction ζ de Riemann

Les polynômes de Bernouilli sont définis par :

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} B'_n(x) & = B_{n-1}(x) \\ B_n(1) & = B_n(0) \end{aligned} \right\} n \geq 2$$

On veut déterminer la série de Fourier S_n de période 1, qui coïncide avec B_n pour $x \in]0, 1[$.

1 Déterminer S_1 .

2 Établir que le coefficient a_0 de S_n est nul $\forall n$.

3 Quelle relation existe-t-il entre S_n et S_{n-1} ? En déduire l'expression de S_n ; on distinguera le cas n pair du cas n impair.

4 Justifier que $S_n(0) = B_n(0)$ pour $n \geq 2$. Calculer $B_2(x)$ et $B_4(x)$ et en déduire $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$ où la fonction ζ de Riemann est définie par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Problème 1.3 Phénomène de Gibbs

- 1** Soit f une fonction 2π -périodique admettant un développement en série de Fourier et $S_N(t)$ la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier

$$S_N(t) = a_0/2 + \sum_{n=0}^N a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

- a) Montrer que

$$a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \cos(n(t' - t)) dt'$$

- b) En déduire que

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})(t' - t)]}{\sin[\frac{1}{2}(t' - t)]} dt'$$

- 2** Soit la fonction f , impaire, 2π -périodique, définie par $f(t) = 1$ sur $[0, \pi[$.

- a) Déterminer sa série de Fourier.

- b) En utilisant le résultat de la question **1 b)** montrer que pour $t \in]-\pi, \pi[$

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^t \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})u]}{\sin(\frac{1}{2}u)} du - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-t}^{\pi+t} \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})u]}{\sin(\frac{1}{2}u)} du$$

- c) On regarde le voisinage de $t = 0$ et on se place pour N grand. Montrer que dans cette situation la seconde intégrale est négligeable devant la première et que

$$S_N(t) \simeq \frac{1}{\pi m} \int_0^{mt} \frac{\sin v}{\sin(\frac{v}{2m})} dv$$

où on a posé $m = N + \frac{1}{2}$, $v = um$.

- d) En déduire que le premier maximum de $S_N(t)$ apparaît pour $t \simeq \frac{\pi}{m} \simeq \frac{\pi}{N}$. Montrer qu'une valeur approchée du premier maximum de $S_N(t)$ est donnée par

$$S_N^{\max} \simeq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$$

Quelle remarque peut-on faire au vu de ce résultat ?

Problème 1.4 Formule de Stirling pour la fonction Γ

- 1** Montrer que

$$\int_0^1 \ln \Gamma(t) dt = \ln \sqrt{2\pi}$$

2 On définit pour $x \geq 0$

$$F(x) = \int_x^{x+1} \ln \Gamma(t) dt$$

a) Calculer $F'(x)$.

b) À l'aide du résultat de la question **1** en déduire l'expression de $F(x)$.

3 En appliquant la règle des trapèzes (voir formulaire) à l'intégrale qui définit la fonction F montrer que (formule de Stirling)

$$x \gg 1 \Rightarrow \Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} (1 + o(1/x))$$

Formulaire

$$\int_0^1 \ln \sin(\pi\theta) d\theta = -\ln 2$$

$$0 < \frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x) \leq \frac{1}{x-1} \quad \text{pour } x > 1$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} (b-a) [f(a) + f(b)] - \frac{1}{12} (b-a)^3 f''(\theta) \quad \text{avec } \theta \in]a, b[$$

DU MAL À DÉMARRER ?

1.1 **1** et **2** Utiliser les critères de convergence.

3 Décomposer $\frac{1}{x^3+1}$ en éléments simples. Dans cette même question pour intégrer les éléments simples prendre la partie principale à l'infini (justifier).

1.2 **1** et **2** Utiliser les critères de convergence.

3 Utiliser la table de séries entières.

1.3 **2** Seconde équation : utiliser la méthode de variation des constantes.

1.4 **1 a)** Définir une fonction $g(t) = f(t)$ pour $t \in]a, b[$ et $g(t) = 0$ sinon.

2 d) et **3** : Utiliser la formule de Leibniz. **4 a)** : La dérivée d'une fonction discontinue est différente selon qu'on la calcule au sens des fonctions ou au sens des distributions.

1.5 Vérifier les symétries éventuelles de la fonction selon les valeurs de a et b .

3 On remarque que $g = f'$.

Chapitre 1 • Outils mathématiques de base

1.6 La fonction est continue donc elle est égale à sa série de Fourier en particulier en $t = 0$ et $t = \pi$.

1.7 Prendre soigneusement la limite $\omega_0 \rightarrow 1$.

1.8 L'équation différentielle ne fait intervenir que des dérivées paires et le second membre est une fonction paire ; on cherche donc la solution sous la forme d'une série de Fourier paire.

1.9 Prolonger la fonction f sur $]-L, 0[$ de façon à obtenir une fonction paire (impaire) et prolonger la fonction ainsi définie $]-L, L[$ sur \mathbb{R} par périodicité de période $2L$.

1.10 Attention (voir table dans les rappels de cours) : on définit $\Gamma(x)$ pour $x < 0$ non entier en prolongeant les valeurs pour $x > 0$ à l'aide de l'identité $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$ pour $x \in]-n, -n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1.11 I_2 : poser $u = \sqrt{t+b^2}$; I_6 : intégrer par parties et utiliser $\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \text{sign}(\alpha)$; I_8 : distinguer le cas $\alpha < \beta < -b$ du cas $-b < \alpha < \beta$; I_9 : poser $t = e^u$; I_{11} : poser $u = t^{2n}$; I_{12} : poser $u = t^2/9$.

1.12 **1** a) et b) On peut utiliser un raisonnement graphique.

Problème 1.1

Les conditions aux limites suggèrent de chercher des solutions de la forme

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n(t) \sin n\pi \frac{x}{l} ;$$

pour implémenter la condition initiale utiliser les séries de Fourier sinus (exercice 1.9).

Problème 1.2

1 Remarquer que la série de Fourier \mathcal{S}_1 est une fonction impaire. Dans la suite, attention à ne pas faire de confusion entre l'indice n qui numérote les polynômes de Bernouilli et l'indice k qui repère les coefficients de Fourier.

2 La relation de récurrence entre les $a_k(n)$ et les $b_k(n+1)$ sera transformée en relations par pas de deux dans une même série de coefficients.

Problème 1.3

2 b) Dans l'expression de $S_N(t)$ on fera un changement de variable $u = t - t'$ dans l'intégrale entre $-\pi$ et 0 et $u = t' - t$ dans l'autre intégrale.

2 c) On établira que pour $t \sim 0$ les deux intégrales de la question **4** sont de la forme

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} g(t) dt = 2\epsilon g(a) + o(\epsilon).$$

Problème 1.4

1 On fera le changement de variable $t' = 1 - t$. Dans tout le problème, utiliser les propriétés de la fonction Γ .

1.1 1 Convergence des intégrales :

a) La fonction $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ est non bornée en 0 et 1 qui sont les deux bornes de l'intégrale.

Pour $x \sim 0$: $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$; le critère de comparaison avec l'intégrale de Riemann est applicable avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ donc l'intégrale converge à la borne inférieure.

Pour $x \sim 1$: $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$; là encore le critère de comparaison avec l'intégrale de Riemann est applicable avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ donc l'intégrale converge aussi à la borne supérieure ; elle est donc *convergente*.

b) La fonction $\frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$ est non bornée en -1 et 0. Pour $x \sim 0$: $\frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{1/3}}$; le critère de comparaison avec l'intégrale de Riemann est applicable avec $\alpha = \frac{1}{3} < 1$ donc

l'intégrale converge en 0. Pour $x \sim -1$: $\frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}} \sim \frac{1}{-(x+1)}$; le critère de comparaison avec l'intégrale de Riemann est applicable avec $\alpha = 1$ donc l'intégrale diverge à la borne inférieure ; elle est donc *divergente*.

c) Pour $x \sim 0$: $\frac{x+1}{\sqrt{x(x^3+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$; on a donc de nouveau $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ et l'intégrale converge en 0. À l'infini $\frac{x+1}{\sqrt{x(x^3+1)}} \sim \frac{1}{x}$. On a ici $\alpha = 1$ donc l'intégrale diverge à l'infini ; elle est donc *divergente*.

d) On a $|e^{-x} \cos x| \leq e^{-x}$ qui est intégrable entre 0 et l'infini. Donc l'intégrable est *convergente*.

2 Étudions la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx$: en $x \sim 0$:

$$\frac{x^{\alpha-1}}{x+1} \sim x^{\alpha-1} = \frac{1}{x^{1-\alpha}}.$$

Le critère de comparaison avec l'intégrale de Riemann conduit à $1 - \alpha < 1 \Rightarrow \alpha > 0$.

À l'infini $\frac{x^{\alpha-1}}{x+1} \sim \frac{1}{x^{2-\alpha}}$. Le critère de comparaison avec l'intégrale de Riemann conduit à $2 - \alpha > 1 \Rightarrow \alpha < 1$. Finalement l'intégrale converge pour $\alpha \in]0, 1[$.

3 À l'infini $\frac{1}{x^3+1} \sim \frac{1}{x^3}$ qui décroît plus vite que $\frac{1}{x}$. L'intégrale converge donc à l'infini. La fonction $\frac{1}{x^3+1}$ est non bornée en $x = -1$. Au voisinage de $x = -1$:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} \sim \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^\alpha}$$

avec $\alpha = 1$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$ est donc divergente au sens standard.

Au sens de la partie principale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right] \\ \text{PP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \left[\text{PP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+1} dx - \text{PP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{x^2-x+1} dx \right] \end{aligned}$$

L'intégrale originelle est convergente à l'infini mais dans la décomposition de la fraction rationnelle on fait apparaître deux intégrales, chacune étant divergente au sens standard. Comme l'intégrale de départ est convergente (à l'infini) on peut donc aussi bien la prendre en partie principale et donc chacune des deux intégrales ci-dessus sera calculée en partie principale à l'infini ce qui permet de récupérer la partie finie de la somme des deux intégrales. En outre, la première sera calculée aussi en partie principale en -1 .

$$\begin{aligned} \text{PP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+1} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-R}^{-1-\epsilon} \frac{1}{x+1} dx + \int_{-1+\epsilon}^R \frac{1}{x+1} dx \right\} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln|x+1| \Big|_{-R}^{-1-\epsilon} + \ln|x+1| \Big|_{-1+\epsilon}^R \right\} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ \ln \epsilon - \ln(R-1) + \ln(R+1) - \ln \epsilon \} = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln \frac{R+1}{R-1} = 0 \end{aligned}$$

Dans l'autre intégrale, le dénominateur ne s'annule pas. Faisons le changement de variable $u = x - \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \text{PP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{x^2-x+1} dx &= \text{PP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u - \frac{3}{2}}{u^2 + \frac{3}{4}} du \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-R}^R \frac{u}{u^2 + \frac{3}{4}} du - \frac{3}{2} \int_{-R}^R \frac{1}{u^2 + \frac{3}{4}} du \right\} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u}{\sqrt{3}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = -\pi \sqrt{3} \end{aligned}$$

où la première des deux intégrales dans la deuxième ligne est nulle par symétrie (intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine). En regroupant les

résultats on obtient

$$\text{PP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Ce dernier exercice met bien en évidence le rôle de la limite symétrique dans la définition d'une intégrale en partie principale puisque la compensation des infinis se fait grâce à cette symétrie.

1.2 1 Déterminons la nature des séries :

a) Le terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n}$ pour n grand. La série est de même nature que celle de terme général $\frac{1}{n}$ c'est-à-dire *divergente* (série de Riemann avec $\alpha = 1$).

b) Le terme général $u_n = \frac{2^n+1}{3^n+n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1+1/2^n}{1+n/3^n} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour n grand. La série est de même nature que celle de terme général $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ qui est une série géométrique de raison $\frac{2}{3} < 1$. La série est donc *convergente*.

c) Asymptotiquement le logarithme est dominé par la fonction puissance ; il existe donc $\epsilon \in]0, 1[$ et $N(\epsilon)$ tels que $n \geq N(\epsilon) \Rightarrow \ln n \leq n^\epsilon$. On a alors $\frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{2-\epsilon}}$. La comparaison avec la fonction de Riemann pour $x = 2 - \epsilon > 1$ permet de conclure à la *convergence* de la série.

d) La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée avec $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est monotone décroissant et tend vers zéro. Le critère de Leibniz est satisfait et la série *converge*.

2 La série de terme général $(1-a)^n$ est une série géométrique. Elle converge pour $|1-a| < 1$ c'est-à-dire pour $a \in]0, 2[$. Sa somme est $\frac{1}{1-(1-a)} = \frac{1}{a}$.

3 On peut écrire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Big|_{x=1} = e^1 = 2,718\dots$

4 Les séries $\sum_n |a_n|$ et $\sum_n |b_n|$ convergent. Il en est de même de la série $\sum_n |a_n| + |b_n|$. Par ailleurs $\sum_n |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq \sum_n |a_n| + |b_n| \forall x$. Donc d'après le théorème de Weirstrass la série trigonométrique converge alors uniformément pour tout x et sa somme est une fonction continue.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Cet exercice fait apparaître l'utilité du critère de comparaison avec la série de Riemann ou avec la série géométrique.

Chapitre 1 • Outils mathématiques de base

1.3 1 On résout les équations différentielles du premier ordre :

a) C'est une équation séparable :

$$y' + y^2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} = -\sin x \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \cos x + C \Rightarrow y(x) = \frac{-1}{\cos x + C}$$
$$y(0) = \frac{-1}{1 + C} = 1 \Rightarrow C = -2$$

finalement

$$y(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$$

b) Là aussi on a une équation séparable :

$$y' = a^2 - y^2 \Leftrightarrow \frac{y'}{a^2 - y^2} = 1$$
$$\frac{1}{2a} \left[\frac{y'}{a - y} + \frac{y'}{a + y} \right] = 1 \Rightarrow \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + y}{a - y} \right| = x + C$$
$$\frac{a + y}{a - y} = K e^{2ax} \Rightarrow y(x) = a \frac{K e^{2ax} - 1}{K e^{2ax} + 1}$$

c) On a une équation linéaire. On cherche d'abord la solution générale de l'équation sans second membre

$$(1 + x)y' + \frac{y}{x} = 0$$

qui est séparable

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x(1+x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}$$
$$\Rightarrow y_1(x) = K \frac{x+1}{x}$$

Recherchons maintenant une solution particulière de l'équation complète par la méthode de variation de la constante :

$$y_0(x) = K(x) \frac{x+1}{x}$$
$$(1+x)y_0' + \frac{y_0}{x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow K'(x) \frac{(x+1)^2}{x} = \frac{1}{x^2}$$
$$\Rightarrow K'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$
$$\Rightarrow K(x) = \ln \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} + C$$

Ce qui donne finalement

$$y(x) = \frac{x+1}{x} \ln \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} + C \frac{x+1}{x}$$

2 Résolution d'équations différentielles du second ordre.

a) On résout l'équation sans second membre en cherchant des solutions en e^{rx}

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 2 &= 0 \Rightarrow r = -1 \pm i \\ y_0(x) &= e^{-x} (A \cos x + B \sin x) \end{aligned}$$

Le second membre est de la forme $f_1(x) + f_2(x)$ avec $f_1(x) = 2x$ et $f_2(x) = -\sin x$. On va donc chercher y_1 et y_2 solutions de

$$\begin{aligned} y_1'' + 2y_1' + 2y_1 &= 2x \\ y_2'' + 2y_2' + 2y_2 &= -\sin x \end{aligned}$$

et la solution recherchée de l'équation complète sera la somme $y_1 + y_2$.

Cherchons y_1 sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y_1(x) = ax + b$. En identifiant on obtient :

$$2a + ax + b \equiv 2x \Rightarrow a = 2, b = -4 \Rightarrow y_1(x) = 2x - 4$$

Cherchons y_2 sous la forme d'une combinaison de fonctions trigonométriques :

$$y_2(x) = a \cos x + b \sin x.$$

En identifiant on obtient :

$$(a + 2b) \cos x + (b - 2a) \sin x \equiv -\sin x \Rightarrow a + 2b = 0, b - 2a = -1$$

On en déduit $a = \frac{2}{5}$ et $b = -\frac{1}{5}$ et

$$y_2(x) = \frac{1}{5} (2 \cos x - \sin x)$$

Finalement la solution générale est donnée par

$$y(x) = e^{-x} (A \cos x + B \sin x) + 2x - 4 + \frac{1}{5} (2 \cos x - \sin x)$$

b) L'équation sans second membre a pour solution $y_1(x) = A \cos x + B \sin x$. Pour trouver la solution particulière de l'équation complète on va utiliser la variation des constantes : on cherche $y_0(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} y_0(x) &= A(x) \cos x + B(x) \sin x \\ y_0'(x) &= -A(x) \sin x + B(x) \cos x + A'(x) \cos x + B'(x) \sin x \end{aligned}$$

On a deux fonctions inconnues $A(x)$ et $B(x)$, il faut donc deux équations pour les déterminer. L'une sera l'équation différentielle ; pour l'autre imposons

$$A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0 \tag{1.1}$$

Chapitre 1 · Outils mathématiques de base

ce qui simplifie l'expression de $y_0'(x)$

$$y_0'(x) = -A(x) \sin x + B(x) \cos x$$

Il vient donc pour $y_0''(x)$

$$y_0''(x) = -A(x) \cos x - B(x) \sin x - A'(x) \sin x + B'(x) \cos x$$

En injectant dans l'équation complète on obtient

$$-A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = \ln |\cos x| \quad (1.2)$$

On a donc deux équations (1.1) et (1.2) pour A' et B' ; on en tire

$$A'(x) = -\sin x \ln |\cos x| \quad ; \quad B'(x) = \cos x \ln |\cos x|$$

On en déduit

$$\begin{aligned} A(x) &= \int -\sin x \ln |\cos x| dx \stackrel{u=\cos x}{=} \int \ln |u| du = u \ln |u| - u \\ &= \cos x \ln |\cos x| - \cos x \end{aligned}$$

Pour calculer la primitive qui définit $B(x)$ on intègre par parties :

$$\begin{aligned} B(x) &= \int \cos x \ln |\cos x| dx = \sin x \ln |\cos x| + \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx \\ &= \sin x \ln |\cos x| + \int \frac{1}{\cos x} dx - \int \cos x dx \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &\stackrel{t=\tan x/2}{=} \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right] dt \\ &= \ln \left| \frac{1+\tan x/2}{1-\tan x/2} \right| \end{aligned}$$

Finalement

$$B(x) = \sin x \ln |\cos x| - \sin x + \ln \left| \frac{1+\tan x/2}{1-\tan x/2} \right|$$

On reconstitue la solution $y_0(x) = A(x) \cos x + B(x) \sin x$ et on obtient :

$$y(x) = A \cos x + B \sin x + \ln |\cos x| - 1 + \sin x \ln \left| \frac{1+\tan x/2}{1-\tan x/2} \right|$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La méthode de la variation des constantes est peu connue pour les équations du second ordre. Dans ce dernier calcul, elle est indispensable. On peut aussi trouver une solution particulière à l'aide des séries de Fourier, mais sous une forme non explicite.

1.4 1 a) On introduit une fonction auxiliaire : $g(t) = f(t)$ pour $t \in]a, b[$ et 0 sinon. Ensuite on utilise les définitions

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(t - t_0) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) g(t) dt = g(t_0) \\ &= f(t_0) \text{ pour } t_0 \in]a, b[\text{ et } 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

b) Montrons que $\delta(at + b) = \frac{1}{|a|} \delta(t + \frac{b}{a})$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at + b) f(t) dt &\stackrel{t'=at}{=} \text{sign}(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t' + b) f\left(\frac{t'}{a}\right) \frac{dt'}{a} = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{-b}{a}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right) f(t) dt \end{aligned}$$

Le facteur $\text{sign}(a)$ devant la seconde intégrale vient du fait que les bornes $\pm\infty$ sont inversées dans le changement de variable si a est négatif. Par ailleurs $\frac{\text{sign}(a)}{a} = \frac{1}{|a|}$.

2 On utilise les définitions et le résultat de la question précédente 1(a).

a) $\int_{-\infty}^{\infty} (2t + 3) \delta(t + 1) dt = (2t + 3)|_{t=-1} = 1$

b) $\int_0^{\infty} t e^{-t^2} \delta(t + 1) dt = 0$ car -1 n'est pas dans l'intervalle d'intégration.

c) $\int_{-1}^2 (t^3 + 3t^2) \delta'(t - 1) dt = - (t^3 + 3t^2)'|_{t=1} = -9$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} t \cos(t) \delta^{(n)}(t) dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} [t \cos(t)] \Big|_{t=0} = n(-1)^{[n/2]+1}$ si n est impair, 0 sinon.

3 Calcul de $t^n \delta^{(k)}(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t^n \delta^{(k)}(t) f(t) dt &= (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} [t^n f(t)] \Big|_{t=0} = (-1)^k \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{d^j}{dt^j} [t^n] \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} [f(t)] \Big|_{t=0} \\ &= (-1)^k \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{n!}{(n-j)!} t^{n-j} [f(t)]^{(k-j)} \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Seul le terme constant ($j = n$) contribue dans la somme prise en $t = 0$. Comme $j \leq k$, si $n > k$ il n'y aura pas de terme en t^0 et donc la somme est nulle. Si $n \leq k$ alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \delta^{(k)}(t) f(t) dt = (-1)^k C_k^n n! [f(t)]_{t=0}^{(k-n)} = (-1)^k C_k^n n! \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k-n)}(t) f(t) dt$$

Chapitre 1 • Outils mathématiques de base

On a donc

$$\begin{aligned}t^n \delta^{(k)}(t) &= (-1)^n C_k^n n! \delta^{(k-n)} \text{ si } n \leq k \\ &= 0 \text{ si } n > k\end{aligned}$$

On en déduit que

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \delta^{(k)}(t)$$

(où les α_k sont des constantes arbitraires) est solution de l'équation $t^n T = 0$ et

$$T = (-1)^n \delta^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \delta^{(k)}(t)$$

(où les α_k sont des constantes arbitraires) est solution de l'équation $t^n T = \delta$.

4 Potentiel coulombien à une dimension.

a) Calculons la dérivée au sens des distributions de la fonction valeur absolue : $f : x \mapsto |x|$;
 $f'(x) = \text{sign}(x)$; $f''(x) = 2\delta$ puisqu'il y a une discontinuité de saut 2 en $t = 0$.

b) On déduit de la question précédente que la solution de l'équation de Poisson $\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(x)$ est :

$$V(x) = -\frac{q}{2\epsilon_0} |x| + Ax + B$$

Pour avoir une solution symétrique $x \leftrightarrow -x$ (fonction paire) il faut $A = 0$. De plus on prend $B = 0$ ce qui revient à fixer l'origine des potentiels.

c) Cette particule est soumise, de la part de celle qui est placée à l'origine, à une force $F = qV' = -\frac{q^2}{2\epsilon_0} \text{sign}(x)$. L'équation du mouvement est donc

$$m\ddot{x} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0} \text{sign}(x)$$

Supposons qu'à l'instant $t = 0$ on ait $x_0 > 0$ et $v_0 > 0$ alors $x(t) = -\frac{q^2}{2m\epsilon_0} t^2 + v_0 t + x_0$. Quel que soit v_0 il y aura toujours un instant où $x(t)$ reviendra vers zéro. La force changera alors de signe et la particule sera toujours attirée vers le centre et ne pourra jamais s'échapper à l'infini. Ce phénomène de « confinement » est spécifique de l'espace à une dimension et est dû au fait que la force est constante.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Ces exercices permettent de se familiariser avec les règles de calcul mettant en jeu l'impulsion de Dirac. La théorie rigoureuse sous-jacente à ces règles sera développée au chapitre 5.

1.5 1 On détermine les coefficients de la série de Fourier de f d'après les définitions et à l'issue d'un calcul simple d'intégrales on obtient :

$$a_0 = -\frac{\pi}{2\omega}(a-b) \quad ; \quad a_n = \frac{(a-b)}{\pi\omega} \frac{[1 - (-1)^n]}{n^2} \quad ; \quad b_n = -\frac{(a+b)}{\omega} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$f(t) = -\frac{\pi}{4\omega}(a-b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-b)}{\pi\omega} \frac{[1 - (-1)^n]}{n^2} \cos n\omega t - \frac{(a+b)}{\omega} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\omega t$$

Si $|a| \neq |b|$ la fonction est discontinue et n'a pas de propriété de parité : $(a_n \text{ et/ou } b_n) \sim \frac{1}{n}$.

Si $a = b$ la fonction est impaire et discontinue : $a_n \equiv 0$ et $b_n \sim \frac{1}{n}$. Si $a = -b$ la fonction est paire et continue : $b_n \equiv 0$ et $a_n \sim \frac{1}{n^2}$.

2 Les coefficients de la série de Fourier de g sont

$$a'_0 = (a+b) \quad ; \quad a'_n = 0 \quad ; \quad b'_n = -\frac{(a-b)}{\pi} \frac{[1 - (-1)^n]}{n}$$

$$g(t) = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{(a-b)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \sin n\omega t$$

3 On a $g(t) = f'(t)$. Si f continue, alors $a'_n = n\omega b_n$ et $b'_n = -n\omega a_n$ par dérivation de la série terme à terme. Cette dernière relation pour b'_n est ici bien vérifiée ; cela ne marche pas pour a'_n car f est discontinue (si $a \neq -b$). En revanche

$$a'_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \left\{ f(t) \cos(n\omega t) \Big|_{-T/2}^{T/2} + n\omega \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \right\}$$

$$= \frac{2}{T} \left[f\left(\left(\frac{T}{2}\right)^-\right) - f\left(\left(-\frac{T}{2}\right)^+\right) \right] \cos(n\omega T/2) + n\omega b_n = n\omega b_n + (a+b)(-1)^n = 0$$

on vérifie $a'_n = n\omega b_n - \frac{2}{T} \sigma_0 \cos(n\omega t_0)$ où σ_0 est le saut à la discontinuité en $t_0 = k \frac{T}{2}$.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Vérifier que le comportement asymptotique des coefficients est compatible avec les propriétés de continuité de la fonction et de ses dérivées. C'est un bon test des calculs ; dans la question

2 on a un exemple de série qui n'est pas dérivable terme à terme ; cela est à mettre en regard avec la non-convergence uniforme sur une période.

1.6 On utilise

$$\int e^{-at} \sin(bt) dt = \frac{e^{-at}}{a^2 + b^2} [-a \sin(bt) - b \cos(bt)]$$

Chapitre 1 • Outils mathématiques de base

et

$$\int e^{-at} \cos(bt) dt = \frac{e^{-at}}{a^2 + b^2} [b \sin(bt) - a \cos(bt)]$$

pour calculer les coefficients de Fourier. On obtient

$$S(f; t) = \frac{1}{\pi a} (1 - e^{-a\pi}) + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n e^{-a\pi}] \frac{1}{n^2 + a^2} \cos nt$$

La fonction f est continue donc $S(f) \equiv f \quad \forall t$. En particulier

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 = \frac{1}{\pi a} (1 - e^{-a\pi}) + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n e^{-a\pi}] \frac{1}{n^2 + a^2} \\ f(\pi) &= e^{-a\pi} = \frac{1}{\pi a} (1 - e^{-a\pi}) + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n e^{-a\pi}] \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \end{aligned}$$

Posons $T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$ et $T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\pi a} (1 - e^{-a\pi}) + \frac{2a}{\pi} [T_2 - e^{-a\pi} T_1] \\ e^{-a\pi} &= \frac{1}{\pi a} (1 - e^{-a\pi}) + \frac{2a}{\pi} [T_1 - e^{-a\pi} T_2] \end{aligned}$$

On en déduit

$$T_1 = \frac{\pi}{2a \sinh(\pi a)} - \frac{1}{2a^2} \quad T_2 = \frac{\pi}{2a \tanh(\pi a)} - \frac{1}{2a^2}$$

D'après les notations de l'énoncé $S_1 = \frac{1}{a^2} + T_1$ et $S_2 = \frac{1}{a^2} + T_2$; on a donc

$$S_1 = \frac{\pi}{2a \sinh(\pi a)} + \frac{1}{2a^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{\pi}{2a \tanh(\pi a)} + \frac{1}{2a^2}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La valeur de la somme d'une série de Fourier en un point est donnée par le théorème de Dirichlet. Si la fonction est continue elle coïncide avec sa série de Fourier $\forall t$. Les séries de Fourier fournissent un moyen efficace pour calculer la somme de séries numériques.

1.7 La fonction est impaire donc $a_n = 0$ et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_0 t) \sin(nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n - \omega_0)t - \cos(n + \omega_0)t] dt \\ &= \frac{2 \sin(\omega_0 \pi)}{\pi} \frac{n(-1)^n}{\omega_0^2 - n^2} \Rightarrow S(f) = \frac{2 \sin(\omega_0 \pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\omega_0^2 - n^2} \sin(nt) \end{aligned}$$

Si $\omega_0 \rightarrow 1$ alors $\sin(\omega_0 \pi) \rightarrow 0$ et tous les coefficients s'annulent sauf b_1 qui vaut

$$b_1 = \lim_{\omega_0 \rightarrow 1} \left[\frac{-2 \sin(\omega_0 \pi)}{\pi (\omega_0^2 - 1)} \right] = 1$$

Ce résultat est cohérent puisque la série de Fourier se réduit au seul terme $\sin t$ qui n'est autre que la fonction $f(t)$.

1.8 Le second membre de l'équation correspond à la fonction f de l'exercice 1.5 **1** avec $a = -1$ et $b = 1$. On en déduit :

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)t]}{(2k+1)^2}$$

Comme le second membre est une fonction paire et 2π périodique et que l'équation préserve la parité (dérivées d'ordre 0 et 2), on cherche une solution sous la forme d'une fonction paire et 2π périodique : $y = a_0/2 + \sum_n a_n \cos(nt)$. En injectant dans l'équation différentielle

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= -4(a_0/2) + \sum_n (-n^2 - 4) a_n \cos(nt) \\ &\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)t]}{(2k+1)^2} \end{aligned}$$

Par identification on obtient

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{\pi}{4} & a_{2k} &= 0 & a_{2k+1} &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^2 [(2k+1)^2 + 4]} \\ y(t) &= -\frac{\pi}{8} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)t]}{(2k+1)^2 [(2k+1)^2 + 4]} \end{aligned}$$

Remarquons que la série obtenue est bien deux fois dérivable puisque les coefficients de la série dérivée deux fois terme à terme se comportent encore en $\frac{1}{(2k+1)^2}$ qui est le terme général d'une série absolument convergente.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La solution de l'équation est obtenue sous la forme d'une série rapidement convergente ($a_n \sim \frac{1}{n^4}$) donc facilement calculable numériquement.

1.9 Pour avoir une série de sinus on construit un motif entre $-L$ et L qui coïncide avec la fonction f sur $(0, L)$ et avec $-f$ sur $(-L, 0)$; on prolonge cette fonction impaire par périodicité

Chapitre 1 • Outils mathématiques de base

de période $2L$. La série de Fourier de la fonction g ainsi obtenue ne comprendra donc que des termes en $\sin(n\pi\frac{x}{L})$. Le coefficient de Fourier est donné par

$$b_n = \frac{2}{(2L)} \int_{-L}^L g(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right) dx$$

Pour avoir une série de cosinus il faut construire un motif pair.

- Série de Fourier cosinus de $\sin t$ sur $[0, \pi]$:

$$\sin t = a_0/2 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos 2nt \quad \text{avec } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos 2nt dt = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

- Série de Fourier sinus de $\cosh t$ sur $]0, 1[$:

$$\cosh t = \sum_{n \geq 1} b_n \sin n\pi t \quad \text{avec } b_n = 2 \int_0^1 \cosh t \sin n\pi t dt = 2\pi [1 - (-1)^n \cosh(1)] \frac{n}{n^2\pi^2 + 1}$$

- Série de Fourier cosinus de $\cosh t$ sur $]0, 1[$:

$$\cosh t = a_0/2 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos n\pi t \quad \text{avec } a_n = 2 \int_0^1 \cosh t \cos n\pi t dt = 2 \sinh(1) \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2 + 1}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Une fonction peut être représentée sur un intervalle soit par une série de Fourier complète, soit par une série de sinus, soit par une série de cosinus.

1.10 **D** On utilise la relation fonctionnelle : $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$,

$$\text{Définition de la fonction } B : B\left(2, -\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(-1/2)}{\Gamma(3/2)} = \frac{\Gamma(2)\Gamma(1/2) / (-1/2)}{1/2\Gamma(1/2)} = -4,$$

De nouveau on utilise la relation fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(3)}{2^n} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{2n!}{2^n (2n)(2n-2)\cdots(2)} \sqrt{\pi} = \frac{2n!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Pour calculer $\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right)$ on utilise la formule des compléments :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left[\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]} = (-1)^n \pi \Rightarrow \Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n)!} \sqrt{\pi} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

2 On effectue un changement de variable dans J_n :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^\infty t^n e^{-at^2} \ln t \, dt \underset{u=at^2}{=} \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^\infty \left(\frac{u}{a}\right)^{n/2} e^{-u} (\ln u - \ln a) \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{2a^{\frac{n+1}{2}}} \left[\Gamma' \left(\frac{n+1}{2} \right) - \ln a \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right) \right] \\ J_0 &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} [\gamma + \ln(4a)] \quad J_1 = -\frac{1}{2a} [\gamma + \ln(a)] \end{aligned}$$

1.11 1 On fait le changement de variable $u = \beta t$. On obtient

$$I_1 = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\beta^{\alpha+1}}$$

2 On fait le changement de variable $u = \sqrt{t + b^2}$. On obtient

$$I_2 = \int_b^\infty e^{-a(u^2 - b^2)} 2du \underset{v=u\sqrt{a}}{=} e^{ab^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \operatorname{Erfc}(b\sqrt{a})$$

3 On identifie I_3 à la première représentation intégrale de la fonction B :

$$I_3 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \pi$$

4 On utilise l'identité : $at^2 + 2bt + c = a\left(t + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}$

$$\begin{aligned} I_4(x) &= e^{-c+b^2/a} \int_x^\infty e^{-a\left(t+\frac{b}{a}\right)^2} dt \underset{u=\left(t+\frac{b}{a}\right)\sqrt{a}}{=} e^{-c+b^2/a} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)}^\infty e^{-u^2} du \\ &= \frac{1}{2} e^{-c+b^2/a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{a}} + x\sqrt{a}\right) \end{aligned}$$

5 On identifie I_3 à la deuxième représentation intégrale de la fonction B :

$$I_5 = \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^\alpha (\cos \theta)^{-\alpha} d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right) = \frac{\pi/2}{\cos(\pi\alpha/2)}$$

6 Le cosinus intégral se comporte comme $\ln x$ pour $x \sim 0$ et il décroît exponentiellement à l'infini. L'intégrale existe donc. On intègre par parties : $u = \operatorname{Ci}(t) \rightarrow u' = \frac{\cos(t)}{t}$;

$$v' = \cos(pt) \rightarrow v = \frac{1}{p} \sin(pt)$$

$$I_6 = \frac{1}{p} \sin(pt) \operatorname{Ci}(t) \Big|_0^\infty - \frac{1}{p} \int_0^\infty \sin(pt) \frac{\cos(t)}{t} dt = -\frac{1}{2p} \int_0^\infty \frac{\sin[(p+1)t] + \sin[(p-1)t]}{t} dt$$

On rappelle $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \text{sign}(\alpha)$. Donc

$$\begin{aligned} I_6 &= -\frac{\pi}{4p} [\text{sign}(p+1) + \text{sign}(p-1)] = +\frac{\pi}{2p} \text{ pour } p < -1 \\ &= 0 \text{ pour } |p| < 1 \\ &= -\frac{\pi}{2p} \text{ pour } p > 1 \\ &= -\frac{\pi}{4} \text{ pour } p = \pm 1 \end{aligned}$$

Cette fonction de p est représentée sur la figure 1.1.

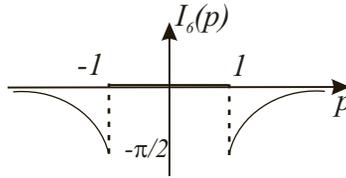


Figure 1.1 Intégrale I6

7 On fait le changement de variable $u = a(t + b)$; il vient

$$I_7 = \int_{ab}^\infty \frac{e^{-u+ab}}{u} du = e^{ab} E_1(ab)$$

8 On fait le changement de variable $u = a(t + b)$; il vient

$$I_8 = e^{ab} \int_{a(\alpha+b)}^{a(\beta+b)} \frac{e^{-u}}{u} du$$

Pour relier cette intégrale à une exponentielle intégrale il faut discuter du signe des bornes, sachant que la condition $-b \notin [a, b]$ implique qu'elles sont toutes les deux de même signe (sinon $u = 0$ serait dans l'intervalle et l'intégrale serait divergente).

Si $0 < a(\alpha + b) < a(\beta + b) \Leftrightarrow -b < \alpha < \beta$ alors

$$\begin{aligned} I_8 &= e^{ab} \int_{a(\alpha+b)}^{a(\beta+b)} \frac{e^{-u}}{u} du = e^{ab} \left\{ \int_{a(\alpha+b)}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{a(\beta+b)}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \right\} \\ &= e^{ab} \{ E_1[a(\alpha + b)] - E_1[a(\beta + b)] \} \end{aligned}$$

Si $a(\alpha + b) < a(\beta + b) < 0 \Leftrightarrow \alpha < \beta < -b$ on ne peut plus utiliser la relation de Chasles avec $+\infty$ car $u = 0$ serait dans l'intervalle; on commence par faire un changement de variable pour se ramener à des bornes positives :

$$I_8 = e^{ab} \int_{a(\alpha+b)}^{a(\beta+b)} \frac{e^{-u}}{u} du \stackrel{u \rightarrow -u}{=} e^{ab} \int_{-a(\alpha+b)}^{-a(\beta+b)} \frac{e^u}{u} du$$

Maintenant, à cause du e^u , on utilise la relation de Chasles avec $-\infty$ pour assurer la convergence à l'infini. Ce faisant on introduit une divergence en $u = 0$; mais comme l'intégrale de départ est convergente on peut aussi la prendre en partie principale et on se ramène alors à la fonction E_i :

$$\begin{aligned} I_8 &= e^{ab} \left\{ PP \int_{-\infty}^{-a(\alpha+b)} \frac{e^u}{u} du - PP \int_{-\infty}^{-a(\beta+b)} \frac{e^u}{u} du \right\} \\ &= e^{ab} \{ E_i [a|\alpha+b|] - E_i [a|\beta+b|] \} \end{aligned}$$

9 On fait le changement de variable $u = \ln t$; il vient

$$\begin{aligned} I_9 &= \int_0^\infty \sqrt{u} e^{-2u} \frac{du}{u} \stackrel{v=2u}{=} \int_0^\infty \frac{\sqrt{u}}{e^{2u}} e^u du \\ &= \int_0^\infty \sqrt{u} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

10 On fait le changement de variable $u = a(t+b)$; il vient

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int_{ab}^\infty \frac{\sin(u-ab)}{u} du = \int_{ab}^\infty \frac{\sin u \cos ab - \sin ab \cos u}{u} du \\ &= \cos(ab) \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(ab) \right) + \sin(ab) \text{Ci}(ab) \end{aligned}$$

11 On fait le changement de variable $u = t^{2n}$; il vient

$$I_{11} = \int_{ab}^\infty \frac{u^{\frac{1}{2n}-1}}{1+u} du$$

On reconnaît la troisième représentation intégrale de la fonction B :

$$I_{11} = \frac{1}{2n} B\left(\frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} \frac{\pi}{\sin(\pi/2n)} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

12 On fait le changement de variable $u = t^2/9$; il vient

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_0^1 9^{3/2} (1-u)^{3/2} \frac{3}{2\sqrt{u}} du = \frac{81}{2} \int_0^1 (1-u)^{3/2} u^{-1/2} du \\ &= \frac{81}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{243}{16} \pi \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Cet exercice met en évidence la diversité d'utilisation de ces fonctions définies par des intégrales qui doivent désormais faire partie de la panoplie des fonctions usuelles au même titre que le sinus, l'exponentielle ou le logarithme.

1.12 **1** a) On a

$$f^{*2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_2(t-t')\Pi_2(t')dt' = \int_{-1}^1 \Pi_2(t-t')dt'$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_2(t-t') &= 1 \text{ pour } t-1 < t' < t+1 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Donc

Intervalle en t	Valeur de $f^{*2}(t)$
$t+1 < -1 \cup t-1 > 1 \Leftrightarrow t > 2$	0
$-1 < t+1 < 1 \Leftrightarrow -2 < t < 0$	$\int_{-1}^{t+1} dt' = t+2$
$-1 < t-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < t < 2$	$\int_{t-1}^1 dt' = 2-t$

Finalement

$$f^{*2}(t) = (2-|t|)u(2-|t|) = 2\Lambda_2(t)$$

On peut utiliser une méthode graphique : $\Pi_2(t')$ est un créneau fixe centré en $t' = 0$ et $\Pi_2(t-t')$ un créneau « mobile » centré en $t' = t$. L'intégrale de convolution représente l'aire du recouvrement des deux créneaux que l'on évalue en faisant varier t .

b) Le calcul de l'intégrale ou la méthode graphique conduisent au résultat :

$$\begin{aligned} f^{*3}(t) = \Pi_2(t) * 2\Lambda_2(t) &= 0 & t < -3 \\ &= \frac{1}{2}(t+3)^2 & -3 < t < -1 \\ &= 3-t^2 & -1 < t < 1 \\ &= \frac{1}{2}(t-3)^2 & 1 < t < 3 \\ &= 0 & t > 3 \end{aligned}$$

c) Explicitons l'intégrale de convolution :

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')g(t')dt' = \int_{-a}^a \sin(t-t')(a-|t'|)dt' \\ &= \int_{-a}^0 \sin(t-t')(a+t')dt' + \int_0^a \sin(t-t')(a-t')dt' \\ &= 2(1-\cos a)\sin t \end{aligned}$$

où le résultat s'obtient en intégrant par parties.

d) Ces fonctions sont causales ; leur produit de convolution s'écrit donc

$$\begin{aligned} f_a(t) * f_b(t) &= \frac{u(t)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^t (t-t')^{a-1} e^{-(t-t')} t'^{b-1} e^{-t'} dt' \\ &= \frac{u(t)e^{-t}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^t (t-t')^{a-1} t'^{b-1} dt' \stackrel{v=t'/t}{=} \frac{u(t)e^{-t} t^{a+b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 (1-v)^{a-1} v^{b-1} dv \end{aligned}$$

L'intégrale qui apparaît dans l'expression ci-dessus n'est autre qu'une fonction $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. En remplaçant on obtient :

$$f_a(t) * f_b(t) = \frac{1}{\Gamma(a+b)} t^{a+b-1} e^{-t} u(t) = f_{a+b}(t)$$

2 En utilisant la propriété de $\delta^{(n)}$ on a :

$$f(t) * \delta^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') \delta^{(n)}(t') dt = (-1)^n \left. \frac{d^n}{dt^n} f(t-t') \right|_{t'=0} = f^{(n)}(t)$$

3 Produit de convolution de gaussiennes.

a) On utilise l'identité : $-\alpha t^2 + \beta t = -\alpha(t + \beta/2\alpha)^2 + \beta^2/4\alpha$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2 + \beta t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t+\beta/2\alpha)^2} e^{\beta^2/4\alpha} dt \stackrel{u=\sqrt{\alpha}(t+\beta/2\alpha)}{=} e^{\beta^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \end{aligned}$$

b) Utilisons ce résultat pour évaluer l'intégrale de convolution de deux gaussiennes :

$$\begin{aligned} f_a(t) * f_b(t) &= \frac{1}{2\pi ab} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-t')^2/2a^2} e^{-t'^2/2b^2} dt' \\ &= \frac{1}{2\pi ab} e^{-t^2/2a^2} \int_0^t \exp\left[-t'^2 \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)\right] \exp\left(\frac{2tt'}{2a^2}\right) dt' \end{aligned}$$

Cette intégrale est de la forme de celle de la question 3 a) avec $\alpha = \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right) = \frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2}$ et $\beta = t/a^2$. On a donc

$$\begin{aligned} f_a(t) * f_b(t) &= \frac{1}{2\pi ab} e^{-t^2/2a^2} \sqrt{\frac{2\pi a^2 b^2}{a^2 + b^2}} \exp\left[\frac{t^2}{4a^4 \frac{a^2 + b^2}{2a^2 b^2}}\right] \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi(a^2 + b^2)}} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2} + \frac{b^2 t^2}{2a^2(a^2 + b^2)}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi(a^2 + b^2)}} \exp\left[-\frac{t^2}{2(a^2 + b^2)}\right] = f_{\sigma(a,b)}(t) \end{aligned}$$

où $\sigma(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

c) On a donc $f_a^{*2}(t) = f_{a\sqrt{2}}$; à l'aide du résultat de la question précédente on calcule

$$f_a^{*3} = f_a^{*2} * f_a = f_{a\sqrt{2}} * f_a = f_{\sqrt{(2a^2+a^2)}} = f_{a\sqrt{3}}$$

On vérifie que $f_a^{*n}(t) = f_{a\sqrt{n}}(t) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{t^2}{2na^2}\right)$.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Les intégrales de convolution sont souvent difficiles à calculer; on verra aux chapitres 2 et 3 des méthodes plus efficaces que le calcul direct. Si les fonctions impliquées ont des formes simples – créneaux, triangles – la méthode graphique est efficace.

Corrigés des problèmes

Problème 1.1

On cherche une solution de la forme $u(x, t) = \sum_{n \geq 1} b_n(t) \sin(n\pi \frac{x}{l})$; en effet, cette série en sinus satisfait automatiquement la condition aux bords. En supposant la série dérivable deux fois on obtient

$$\sum_{n \geq 1} \left\{ b_n'(t) + \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \alpha + \beta \right] b_n(t) \right\} \sin(n\pi \frac{x}{l}) = 0$$

$$b_n'(t) + \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \alpha + \beta \right] b_n(t) = 0 \Rightarrow b_n(t) = B_n e^{-\beta t} e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t}$$

$$u(x, t) = e^{-\beta t} \sum_{n \geq 1} B_n e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t} \sin(n\pi \frac{x}{l})$$

Pour déterminer la suite de constantes arbitraires $\{B_n\}$ on utilise la condition initiale qui devient

$$u(x, 0) = \sum_{n \geq 1} B_n \sin(n\pi \frac{x}{l}) \equiv x(l-x) \quad x \in [0, l]$$

Les B_n apparaissent donc comme étant les coefficients de Fourier sinus sur $[0, l]$ de la fonction $x(l-x)$. Donc

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l x(l-x) \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx = \frac{4l^2}{\pi^3} \frac{1 - (-1)^n}{n^3}$$

Finalement

$$u(x, t) = \frac{4l^2}{\pi^3} e^{-\beta t} \sum_{n \geq 1} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} e^{-\alpha \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t} \sin(n\pi \frac{x}{l})$$

On vérifie que la série est dérivable deux fois par rapport à x .

Ce qu'il faut retenir de ce problème

La périodicité de la condition aux bords $u(0, t) = u(l, t) = 0$ suggère de chercher la solution sous la forme d'une série de Fourier. La valeur zéro de la fonction en $x = 0$ et $x = l$ conduit à une série de sinus qui va automatiquement implémenter la condition.

Problème 1.2

On note f_n la fonction de période 1 qui coïncide avec B_n sur $]0, 1[$ et $S_n = S_F(f_n)$ la série de Fourier de cette fonction. On notera $\{a_k(n)\}$ et $\{b_k(n)\}$ les suites de coefficients de Fourier de cette série.

1 On remarque que la fonction f_1 est impaire, donc

$$\begin{aligned} a_k(1) &\equiv 0 \\ b_k(1) &= 2 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \sin(2\pi kx) dx = -\frac{1}{\pi k} \end{aligned}$$

La série s'exprime donc

$$S_1 = -\frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}$$

2 Calculons le coefficient de Fourier $a_0(n)$ de f_n :

$$\text{pour } n \geq 1 \quad a_0(n) = 2 \int_0^1 B_n(x) dx = 2 \int_0^1 B'_{n+1}(x) dx = 2 [B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)] = 0$$

3 Calculons les autres coefficients de Fourier de f_n :

$$\begin{aligned} \text{pour } n \geq 2 : a_k(n-1) &= 2 \int_0^1 B_{n-1}(x) \cos(2k\pi x) dx = 2 \int_0^1 B'_n(x) \cos(2k\pi x) dx \\ &= 2 B_n(x) \cos(2k\pi x) \Big|_0^1 + 2k\pi \times 2 \int_0^1 B_n(x) \sin(2k\pi x) dx \\ &= 2k\pi b_k(n) \\ \Rightarrow b_k(n) &= \frac{1}{2\pi k} a_k(n-1) \end{aligned}$$

On montre de même que

$$a_k(n) = -\frac{1}{2\pi k} b_k(n-1) \quad n \geq 2$$

On en déduit que pour tout $k \geq 1$

$$\Rightarrow a_k(n) = -\left(\frac{1}{2\pi k}\right)^2 a_k(n-2) \quad b_k(n) = -\left(\frac{1}{2\pi k}\right)^2 b_k(n-2) \quad n \geq 3$$

Chapitre 1 • Outils mathématiques de base

On a des relations de récurrence par pas de deux entre les séries de coefficients. Ces relations sont initialisées par

$$\begin{aligned} a_k(1) &= 0 & b_k(1) &= -\frac{1}{\pi k} \\ a_k(2) &= -\frac{1}{2\pi k} b_k(1) = \frac{1}{2\pi^2 k^2} & b_k(2) &= \frac{1}{2\pi k} a_k(1) = 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout n impair la série des $a_k(n)$ est nulle ; de même pour tout n pair la série des $b_k(n)$ est nulle. Les autres coefficients s'obtiennent en résolvant les relations de récurrence, ce qui donne

$$a_k(2p) = \frac{2(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p}} \frac{1}{k^{2p}} \quad b_k(2p+1) = \frac{2(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p+1}} \frac{1}{k^{2p+1}}$$

Finalement

$$S_{2p}(x) = \frac{2(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p}} \sum_{k \geq 1} \frac{\cos(2\pi kx)}{k^{2p}} \quad \text{et} \quad S_{2p+1}(x) = \frac{2(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p+1}} \sum_{k \geq 1} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^{2p+1}}$$

4 Pour $n \geq 2$ les fonctions f_n sont continues du fait de la condition $B_n(1) = B_n(0)$. Donc $f_n(x) \equiv S_n(x) \equiv B_n(x) \quad \forall x \in [0, 1]$. En particulier $S_n(0) \equiv B_n(0)$. Pour $n = 2p$ on peut en déduire la valeur des fonctions ζ de Riemann $\zeta(2p)$:

$$\zeta(2p) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2p}} = \frac{1}{2} (-1)^{p+1} (2\pi)^{2p} B_{2p}(0)$$

Grâce aux relations de récurrence entre les polynômes on trouve $B_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$;
 $B_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}$. On en déduit $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Les séries de Fourier fournissent ici un moyen de calculer la valeur de la fonction ζ de Riemann pour des valeurs entières paires de la variable.

Problème 1.3

1 On va établir une représentation intégrale pour la somme partielle de Fourier.

a) Exprimons la combinaison

$$\begin{aligned} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) &= \cos(nt) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \cos nt' dt' + \sin(nt) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \sin nt' dt' \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \cos(n(t' - t)) dt' \end{aligned}$$

b) On en déduit que

$$\begin{aligned} S_N(t) &= a_0/2 + \sum_{n=0}^N a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(t' - t) \right\} dt' \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \left\{ -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^N \cos n(t' - t) \right\} dt' \end{aligned}$$

On peut calculer explicitement la somme de cosinus en remarquant :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \cos nu &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^N e^{inu} = \operatorname{Re} \frac{e^{i(N+1)u} - 1}{e^{iu} - 1} = \frac{\operatorname{Re} \{ [e^{i(N+1)u} - 1] [e^{-iu} - 1] \}}{4 \sin^2(\frac{u}{2})} \\ &= \frac{\cos(Nu) - \cos[(N+1)u] - \cos(u) + 1}{4 \sin^2(\frac{u}{2})} \\ &= \frac{2 \sin(\frac{u}{2}) \sin[(N + \frac{1}{2})u] + 2 \sin^2(\frac{u}{2})}{4 \sin^2(\frac{u}{2})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})u]}{\sin(\frac{u}{2})} \end{aligned}$$

En reportant dans l'équation ci-dessus on en déduit l'expression pour la somme partielle $S_N(t)$:

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})(t' - t)]}{\sin[\frac{1}{2}(t' - t)]} dt'$$

2 Appliquons cette représentation de la somme partielle à la fonction créneau 2π -périodique impaire.

a) Sa série de fourier n'a que des termes en sinus avec

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left\{ - \int_{-\pi}^0 \sin(nt) dt + \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \right\} = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n}$$

On a donc $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$.

b) En utilisant le résultat de la question **1 b)** on a pour $t \in]-\pi, \pi[$

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ - \int_{-\pi}^0 \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})(t' - t)]}{\sin[\frac{1}{2}(t' - t)]} dt' + \int_0^{\pi} \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})(t' - t)]}{\sin[\frac{1}{2}(t' - t)]} dt' \right\}$$

On pose $u = t - t'$ dans la première intégrale et $u = t' - t$ dans la seconde :

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ - \int_t^{\pi+t} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{1}{2}u} du + \int_{-t}^{\pi-t} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{1}{2}u} du \right\}$$

Chapitre 1 • Outils mathématiques de base

Pour $t \in [0, \pi]$ les intervalles $[-t, \pi - t]$ et $[t, \pi + t]$ se recouvrent sur $[t, \pi - t]$; sur cet intervalle la différence des deux intégrales s'annule; il ne reste que

$$S_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^t \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) u \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} u \right)} du - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-t}^{\pi+t} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) u \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} u \right)} du$$

c) On regarde le voisinage de $t = 0$; en posant $t = \epsilon$ les deux intégrales sont de la forme :

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} g(t) dt = 2\epsilon g(a) + o(\epsilon)$$

où $g(t) = \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) t \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} t \right)}$. Dans la seconde intégrale $a = \pi$ et $g(\pi) = (-1)^N$; dans la première $a = 0$ et $g(0) = 2N + 1$. Donc dans la limite où $N \rightarrow \infty$ la première intégrale est dominante. Si on pose $m = N + \frac{1}{2}$, $v = mu$ on obtient

$$S_N(t) \simeq \frac{1}{\pi m} \int_0^{mt} \frac{\sin v}{\sin \left(\frac{v}{2m} \right)} dv$$

d) Pour obtenir le maximum : $S'_N(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin mt}{\sin(t/2)}$ qui s'annule $mt = \pi \rightarrow t_M = \pi/m$ pour $t < t_M$, $\sin(t/2)$ reste petit positif; la dérivée est donc positive pour $t < t_M$. On a bien un maximum de S_N .

On calcule $S_N(t_M = \pi/m)$; pour $m \simeq N \gg 1$ on a $\frac{v}{2m} \ll 1$ puisque $v \in (0, \pi)$; donc $\sin \left(\frac{v}{2m} \right) \simeq \frac{v}{2m}$ d'où

$$S_N^{\max} \simeq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$$

On a $S_N^{\max} \simeq \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi) \simeq 1.18$. Le fait remarquable est que cette valeur ne dépend pas de N . Quand N croît, ce premier maximum garde toujours la même valeur tandis que sa position $t_M \simeq \frac{\pi}{N}$ se rapproche de zéro.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Le phénomène de Gibbs traduit la convergence non uniforme de la série au voisinage d'une discontinuité.

Problème 1.4

1 En utilisant les propriétés de la fonction Γ on a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \ln \Gamma(t) dt \stackrel{t'=1-t}{=} \int_0^1 \ln \Gamma(1-t') dt' = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 \ln \Gamma(t) dt + \int_0^1 \ln \Gamma(1-t') dt' \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln [\Gamma(t)\Gamma(1-t)] dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \left[\frac{\pi}{\sin \pi t} \right] dt = \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2} \int_0^1 \ln (\sin \pi t) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

2 Soit

$$F(x) = \int_x^{x+1} \ln \Gamma(t) dt \quad x \geq 0$$

a) On a pour, $x > 0$

$$F'(x) = \ln \Gamma(x+1) - \ln \Gamma(x) = \ln \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \ln x$$

b) On en déduit pour $x > 0$

$$F(x) = x \ln x - x + C$$

$$\text{On prolonge pour } x \rightarrow 0 : F(0) = \int_0^1 \ln \Gamma(t) dt = \ln \sqrt{2\pi} = C \Rightarrow$$

$$F(x) = x \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} \quad \text{pour } x \geq 0$$

3 Utilisons la formule des trapèzes pour $F(x)$

$$F(x) = \int_x^{x+1} \ln \Gamma(t) dt = \frac{1}{2} [\ln \Gamma(x+1) + \ln \Gamma(x)] - \frac{1}{12} \frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x) \Big|_{x=\theta} \quad \text{avec } \theta \in]x, x+1[$$

Pour x grand

$$\left| -\frac{1}{12} \frac{d^2}{dx^2} \ln \Gamma(x) \right| \lesssim \frac{1}{12x-1}$$

On en déduit pour x grand

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln [\Gamma(x+1)\Gamma(x)] + o\left(\frac{1}{x}\right) = x \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi}$$

On peut écrire

$$\frac{1}{2} \ln [\Gamma(x+1)\Gamma(x)] = \frac{1}{2} \ln \left[\Gamma(x+1) \frac{\Gamma(x+1)}{x} \right] = \ln \Gamma(x+1) - \ln \sqrt{x}$$

Chapitre 1 · Outils mathématiques de base

En remplaçant dans l'expression ci-dessus

$$\ln \Gamma(x+1) = x \ln x - x + \ln \sqrt{2\pi} + \ln \sqrt{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

on obtient que pour x grand (avec $e^{o(1/x)} = 1 + o(1/x)$)

$$\Gamma(x+1) \simeq \sqrt{2\pi} x^{x+1/2} e^{-x} [1 + o(1/x)]$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Cette démonstration de la formule de Stirling utilise largement les propriétés de la fonction Gamma. La formule de Stirling est plus connue comme approximation de la factorielle. En effet si on l'applique pour $x = n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n+1) = n! \simeq \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Pour $n = 5$ on a $5! = 120$ tandis que la formule de Stirling donne 118, soit moins que 2 % d'erreur.

TRANSFORMATION DE FOURIER

2

RAPPELS DE COURS

a) Définitions

Étant donnée $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; sa transformée de Fourier $F(\nu)$ est une fonction complexe de la variable réelle ν , définie par :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\nu \rightarrow F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu t} f(t) dt$$

On note $F = \mathcal{F}\{f\}$ ou encore (notation usuelle) $F(\nu) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. En physique la fonction $F(\nu)$ est appelée *spectre de fréquence* du signal $f(t)$.

Condition suffisante d'existence : Si $f \in \mathcal{L}^1$ alors sa transformée de Fourier $F = \mathcal{F}\{f\}$ existe ; de plus F est bornée, continue et $\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} F(\nu) = 0$.

b) Transformée inverse

Si une fonction $F(\nu)$ est bornée, continue et $\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} F(\nu) = 0$ alors la fonction f définie par

$$t \rightarrow f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} e^{+2i\pi\nu t} F(\nu) d\nu$$

est telle que $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\nu)$. On note $f = \mathcal{F}^{-1}\{F\}$ ou encore $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\nu)\}$.

Remarque

Deux fonctions égales presque partout ont même transformée de Fourier.

c) Différentes définitions de la transformation de Fourier

Définition	$F = \mathcal{F}\{f\}$	$f = \mathcal{F}^{-1}\{F\}$
<i>En fréquence</i>	$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu t} f(t) dt$	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\nu t} F(\nu) d\nu$
<i>En pulsation</i>	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$
<i>Symétrique en pulsation</i>	$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$

d) Transformation des fonctions de \mathcal{L}^2 . Formule de Plancherel et de Parseval

Si $f \in \mathcal{L}^2$, : alors $F = \mathcal{F}\{f\}$ est définie par

$$F(\nu) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} e^{-2i\pi\nu t} f(t) dt$$

(on remarque que l'intégrale est prise en partie principale à l'infini). Alors $F \in \mathcal{L}^2$.

De plus, on a

Formule de Plancherel
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \overline{G(\nu)} d\nu$$

Formule de Parseval
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

e) Propriétés de la transformation de Fourier

	$f(t)$	$F(\nu)$		$f(t)$	$F(\nu)$
Linéarité	$af + bg$	$aF + bG$	Décalage temporel	$f(t - t_0)$	$e^{-2i\pi\nu t_0} F(\nu)$
Changement d'échelle	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\nu}{a}\right)$	Décalage fréquentiel	$e^{2i\pi\nu_0 t} f(t)$	$F(\nu - \nu_0)$
Symétries	$f(-t)$	$F(-\nu)$	Dérivation/ t	$f^{[n]}(t)$	$(2i\pi\nu)^n F(\nu)$
	$\overline{f(t)}$	$\overline{F(-\nu)}$	Dérivation/ ν	$t^n f(t)$	$\left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n F^{[n]}(\nu)$
Convolution temporelle	$f(t) * g(t)$	$F(\nu)G(\nu)$	Convolution fréquentielle	$f(t)g(t)$	$F(\nu) * G(\nu)$

f) Transformée de Fourier des fonctions usuelles

$f(t)$	$F(\nu)$	$f(t)$	$F(\nu)$
$e^{-at^2} \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2\nu^2}{a}\right)$	$\Lambda_T(t)$	$T (\text{sinc}(\nu T))^2$
$e^{-a t } \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}$	$\text{sinc}(t)$	$\Pi_1(\nu)$
$e^{-at} u(t) \quad a > 0$	$\frac{1}{a + 2i\pi\nu}$	$\delta(t - t_0)$	$e^{-2i\pi\nu t_0}$
$\frac{1}{t^2 + a^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-2\pi a \nu }$	$\delta^{(n)}(t)$	$(2i\pi\nu)^n$
Π_T	$T \text{sinc}(\nu T)$	$e^{2i\pi\nu_0 t}$	$\delta(\nu - \nu_0)$

La fonction Π_T est la fonction *porte* : $\Pi_T(t) = u(t + \frac{T}{2}) - u(t - \frac{T}{2})$; la fonction Λ_T est la fonction *triangle* : $\Lambda_T(t) = (1 - \frac{|t|}{T})u(T - |t|)$; La fonction *sinc* est la fonction *sinus cardinal* : $t \rightarrow \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$.

Lecture inversée de la table. Si $F(\nu) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ et $F \in \mathcal{L}^1$, alors : $\mathcal{F}\{F(t)\} = f(-\nu)$ et $\mathcal{F}^{-1}\{f(\nu)\} = F(-t)$.

ÉNONCÉS DES EXERCICES

2.1 Transformées de Fourier

Déterminer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

- 1** $te^{-t}u(t)$ **2** $\frac{1}{t^2 + 2at + b^2} \quad a^2 < b^2$ **3** $e^{-at^2+bt} \quad a > 0$
4 $\Lambda_T(t)$ **5** $f_5(t) = a$ pour $t \in]-T/2, 0[$
 $= -a$ pour $t \in]0, T/2[$
 $= 0$ sinon **6** $f(t) = \frac{1}{t+i}$

Établir un lien entre le **4** et le **5**.

2.2 Calcul d'intégrales

- 1** Déterminer pour $a > 0$ la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-a|t|}$ et $g(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$;
2 En déduire la valeur des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega t}{t^2 + \alpha^2} dt \quad \int_0^\infty \frac{t \sin \omega t}{t^2 + \alpha^2} dt$$

2.3 Transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide

Une fonction ϕ est à décroissance rapide si elle est C^∞ et si :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} |t^n \phi^{(p)}(t)| = 0$$

L'ensemble de ces fonctions forme un espace vectoriel noté \mathcal{S} .

Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction à décroissance rapide est une fonction à décroissance rapide.

2.4 Produits de convolution

Calculer les produits de convolution $f * g$:

- 1 $f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$ $g(t) = \frac{1}{t^2 + b^2}$
- 2 $f(t) = e^{-at^2}$ $a > 0$ $g(t) = e^{-bt^2}$ $b > 0$
- 3 $f(t) = te^{-\pi t^2}$ $\Pi_2(t)$

2.5 Transformée de Fourier et distributions

- 1 Déterminer la transformée de Fourier de la fonction ci-dessous (figure 2.1) de deux façons différentes :
 - a) par un calcul direct de l'intégral de Fourier de la fonction ;
 - b) en calculant la transformée de la dérivée seconde de la fonction au sens des distributions.

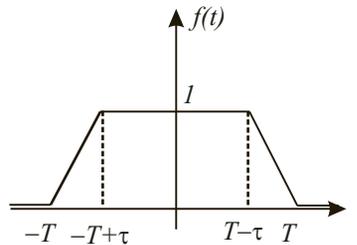


Figure 2.1

- 2 Mettre $F(\nu)$ sous la forme $F(\nu) = \tau_w \text{sinc}(\tau_w \nu) \text{sinc}(\tau \nu)$ où τ_w s'exprime en fonction de T et τ et en déduire que $f(t)$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de convolution.

2.6 Transformée de Fourier cosinus

On définit la transformée de Fourier-cosinus d'une fonction f de \mathcal{L}_+^2 (l'espace vectoriel des fonctions de carré sommable sur \mathbb{R}^+) par $\mathcal{F}_c \{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) \cos(2\pi \nu t) dt$.

Si deux fonctions f et g de \mathcal{L}_+^2 ont pour transformée de Fourier-cosinus $F_c(\nu)$ et $G_c(\nu)$ respectivement, on a la relation de Plancherel

$$\int_0^\infty f(t) \overline{g(t)} dt = 4 \int_0^\infty F_c(\nu) \overline{G_c(\nu)} d\nu$$

- 1 Calculer la transformée de Fourier-cosinus de $f(t) = e^{-t} u(t)$.
- 2 On veut calculer l'intégrale

$$I(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cos t dt$$

où $x \in]0, 1[$. À l'aide de la transformée de Fourier-cosinus de t^{x-1} et du résultat de la question 1, déterminer $I(x)$.

2.7 Résolution d'équations différentielles

1 À l'aide de la transformation de Fourier trouver une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' + 2\pi t y' + 4\pi y = 0$$

2 On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathcal{L}^2$ qui satisfont l'équation

$$\begin{aligned} y'' + a \delta(t) y &= \lambda y \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

où δ est la distribution de Dirac et a un paramètre *réel positif* donné. On note $Y = \mathcal{F}\{y\}$ la transformée de Fourier de y . On rappelle que si $y \in \mathcal{L}^2$ alors $\mathcal{F}\{y\} \in \mathcal{L}^2$.

a) Déterminer $Y(\nu)$, transformée de Fourier de $y(t)$.

b) En déduire que le problème n'a de solution acceptable que si $\lambda > 0$.

c) Déterminer $y(t)$ et λ .

d) Vérifier que la fonction obtenue satisfait bien l'équation différentielle.

2.8 Équation intégrale

Trouver la fonction y qui satisfait

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(u)}{4(x-u)^2 + 1} du = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

2.9 Équation de la chaleur

Trouver la solution de l'équation de la chaleur pour un fil infini :

$$\frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} = \lambda^2 \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \quad t > 0$$

avec la condition initiale $z(x, 0) = \exp(-x^2/x_0^2)$

ÉNONCÉS DES PROBLÈMES

Problème 2.1 Problème de potentiel

On cherche à déterminer le potentiel $V(x, y)$ solution de l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ pour $x > 0, y > 0$ et satisfaisant les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} V(x, y = 0) &= f(x) \\ V(x = 0, y) &= 0 \end{aligned}$$

Chapitre 2 · Transformation de Fourier

où f est une fonction connue (voir figure 2.2). On va résoudre ce problème en utilisant la transformée de Fourier-sinus. On définit

$$\widehat{V}(\nu, y) = \int_0^{\infty} V(x, y) \sin(2\pi\nu x) dx$$

On peut alors montrer que

$$V(x, y) = 4 \int_0^{\infty} \widehat{V}(\nu, y) \sin(2\pi\nu x) d\nu$$

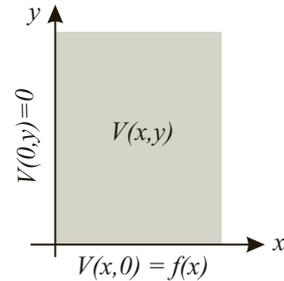


Figure 2.2

- 1 Déterminer et résoudre l'équation satisfaite par \widehat{V} (on supposera que les dérivations sous le signe somme sont légitimes).
- 2 En imposant que \widehat{V} reste bornée pour ($\nu > 0, y > 0$) et en utilisant la condition au bord inférieur montrer que

$$\widehat{V}(\nu, y) = \widehat{f}(\nu) \exp(-2\pi\nu y)$$

où \widehat{f} est la transformée de Fourier-sinus de f .

- 3 En déduire que

$$V(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} f(x') \left[\frac{1}{(x - x')^2 + y^2} - \frac{1}{(x + x')^2 + y^2} \right] dx'$$

- 4 Déterminer $V(x, y)$ dans le cas où $f(x) = V_0 = c^{te}$.

Problème 2.2 Filtres linéaires

L'action d'un filtre linéaire peut être représentée par un produit de convolution : le signal de sortie s résulte de la convolution du signal d'entrée e avec la *réponse impulsionnelle* h caractéristique du filtre :

$$s = \Phi_h(e) = h * e \rightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)e(\tau) d\tau$$

Le gain complexe est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $G(\nu) = \mathcal{F}\{h(t)\}$.

Le filtre « retard » a pour action de décaler le signal d'entrée d'une durée t_0 :

$$e(t) \rightarrow s(t) = e(t - t_0) \quad t_0 > 0$$

- 1 Déterminer le gain complexe puis la réponse impulsionnelle de ce filtre.
- 2 On réalise une approximation du filtre retard par le filtre de gain complexe

$$G(\nu) = e^{-2i\pi\nu t_0} \Pi_{\sigma}(\nu)$$

où Π_{σ} est la fonction porte. Quelle est la réponse impulsionnelle de ce filtre ?

- 3** On envoie dans le filtre de la question **2** la fonction porte $\Pi_\tau(t)$ (on prendra $0 < \tau < t_0$).
a) Montrer que le signal de sortie est de la forme

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \text{Si} \left[\pi \sigma \left(t - t_0 + \frac{\tau}{2} \right) \right] - \text{Si} \left[\pi \sigma \left(t - t_0 - \frac{\tau}{2} \right) \right] \right\}$$

où $\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$ est la fonction sinus intégral.

- b)** Étudier le signal obtenu dans la limite $\sigma \rightarrow \infty$. Que conclure? (On rappelle que $\text{Si}(\pm\infty) = \pm \frac{\pi}{2}$).

Problème 2.3 Théorème de Shannon

Soit f une fonction à bande limitée c'est-à-dire telle que sa transformée de Fourier $F(\nu)$ est à support borné. On suppose que ce support est l'intervalle $[-\nu_0/2, \nu_0/2]$:

$$F(\nu) \equiv 0 \quad \text{pour } |\nu| > \nu_0/2$$

On suppose de plus que $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$.

On désigne par $G(\nu)$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} G(\nu) &= F(\nu) \quad \text{pour } |\nu| \leq \nu_0/2 \\ G(\nu) &\quad \text{périodique de période } \nu_0 \end{aligned}$$

- 1** Écrire le développement en série de Fourier complexe de G . Montrer que ses coefficients de Fourier sont reliés à des valeurs particulières de la fonction f (on posera $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$).

- 2** En déduire que

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT_0) \frac{\sin \pi \nu_0 (t - nT_0)}{\pi \nu_0 (t - nT_0)} \quad \forall t$$

(On justifiera les éventuelles permutations d'intégrale et de sommation.)

Ce résultat constitue le théorème de Shannon, qui montre qu'une fonction à spectre limité est complètement connue à partir d'un ensemble discret de ses valeurs (*échantillon*).

- 3** À partir de la table de transformées de Fourier trouver la transformée de Fourier de $f(t) = \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2$.

- 4** À partir des résultats précédents, établir l'identité :

$$\text{tg } t = t - \frac{8t^3}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 [t^2 - (2k+1)^2 \frac{\pi^2}{4}]} \quad t \neq n \frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{Z}^*$$

Problème 2.4 Largeur temporelle et largeur spectrale

Dans ce problème on va établir que l'étalement fréquentiel d'un signal est inversement proportionnel à son étalement temporel.

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

$$f \in \mathcal{L}^2, \quad tf \in \mathcal{L}^2, \quad f' \in \mathcal{L}^2, \quad \sqrt{|t|}f(t) \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0$$

Soit $F = \mathcal{F}\{f\}$ et $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$. On définit l'étalement temporel de f par

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt}$$

et son étalement spectral σ par

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 |F(\nu)|^2 d\nu}$$

1 Montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 |F(\nu)|^2 d\nu$$

2 En utilisant l'inégalité de Schwartz (voir ci-dessous) sur l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)f'(t)dt$$

établir que $\sigma\tau \geq \frac{1}{4\pi}$.

3 Calculer τ , σ et la valeur du produit $\sigma\tau$ pour la fonction $f(t) = e^{-t^2/4t_0^2}$

Rappel : L'inégalité de Schwartz : $A \in \mathcal{L}^2, B \in \mathcal{L}^2, AB \in \mathcal{L}^1$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} A(t)B(t)dt \right|^2 \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |A(t)|^2 dt \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} |B(t)|^2 dt \right]$$

Problème 2.5 Paquet d'ondes gaussien

La notion de paquet d'ondes apparaît en physique dans divers contextes : en électromagnétisme et en mécanique quantique notamment. Il s'agit d'une superposition d'ondes planes pondérée par une fonction de la fréquence ou de la longueur d'onde.

1 En électromagnétisme on définit

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega$$

où k est une fonction de $\omega \rightarrow k(\omega)$. Le paquet d'ondes apparaît donc comme la transformée de Fourier inverse (en pulsation) de $g(\omega) e^{ik(\omega)x}$. On prend pour fonction de poids $g(\omega) = e^{-(\omega-\omega_0)^2/\delta\omega^2}$ (fonction gaussienne, d'où le nom de paquet d'ondes gaussien).

Déterminer la fonction $\psi(x, t)$ du paquet d'ondes en milieu *absorbant* non dispersif : $k = \omega/c + ik''$ où k'' est constant positif et où c est une constante (vitesse de phase). On se restreint aux ondes progressives définies pour $x \geq 0$.

2 En mécanique quantique on définit le paquet d'ondes gaussien relatif à une particule libre

$$\psi(x, t) = \left(\frac{\delta^2}{4\pi^3} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\delta^2(k-k_0)^2} e^{i(kx-\omega t)} dk \quad \text{avec } \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

a) Déterminer la fonction $\psi(x, 0)$. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, 0)|^2 dx$.

b) Déterminer la fonction $\psi(x, t)$. Calculer $|\psi(x, t)|^2$ puis $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx$.

Indication : On donne les résultats de la transformée de Fourier symétrique en pulsation (voir résumé de cours) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ e^{-t^2/2\tau^2} \right\} &= \tau e^{-\tau^2\omega^2/2}; \text{ on admettra que ce résultat reste vrai pour } \tau^2 \in \mathbb{C} \text{ si } \operatorname{Re} \tau^2 > 0 \\ \mathcal{F} \left\{ e^{i\omega_0 t} f(t) \right\} &= F(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

DU MAL À DÉMARRER ?

- 2.1 Utiliser les tables ; **4** et **5** Utiliser la parité des fonctions à transformer ; **6** Décomposer la fonction en partie réelle et partie imaginaire.
- 2.2 Exprimer les fonctions f et g en termes de la fonction $h(t) = e^{-at}u(t)$ puis utiliser les symétries de la transformation de Fourier. Pour **2**, utiliser l'intégrale de Fourier inverse.
- 2.3 Utiliser la transformée de $\phi^{(p)}$ et celle de $t^n\phi$.
- 2.4 Utiliser la propriété de factorisation du produit de convolution par la transformation de Fourier.
- 2.5 **2** Utiliser la définition de la dérivée d'une fonction discontinue au sens des distributions.
- 2.6 **2** Utiliser l'égalité de Parseval et les fonctions eulériennes.
- 2.7 **2** d) On dérivera $y(t)$ « au sens des distributions ».
- 2.8 Remarquer que l'intégrale est un produit de convolution.
- 2.9 On prend la transformée de Fourier de l'équation *par rapport* à x : $Z(k, t) = \mathcal{F}_x(z(x, t))$.

Problème 2.1

3 Dans l'expression de la transformée de Fourier inverse qui donne $V(x, y)$ on remplacera $\hat{f}(\nu)$ par $\int_0^\infty f(x') \sin(2\pi\nu x') dx'$ et on permutera l'intégration sur ν avec celle sur x' .

Problème 2.2

2 On peut calculer $\mathcal{F}^{-1}\{\Pi_\sigma\}$ soit à partir de la table soit en calculant explicitement l'intégrale de Fourier.

Problème 2.3

1 Attention : la variable de la série de Fourier est une fréquence ; la *période* de la série, ν_0 , a donc la dimension d'une *fréquence*.

4 On déduit de **3** que la fonction $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est à bande limitée et qu'on peut donc utiliser le théorème de Shannon.

Problème 2.4

1 Utiliser l'égalité de Parseval.

Problème 2.5

Dans les deux questions on peut utiliser la transformée de Fourier (en pulsation) des fonctions gaussiennes ou bien utiliser le résultat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2 - bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{b^2/4a^2}$$

valable pour $a \in \mathbb{R}^*$ et qu'on supposera prolongeable au cas $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a^2 > 0$.

Corrigés des exercices

2.1 1 On utilise $\mathcal{F}\{tf(t)\} = \frac{-1}{2i\pi} F'(\nu) : \mathcal{F}\{te^{-t}u(t)\} = \frac{-1}{2i\pi} \left(\frac{1}{1+2i\pi\nu}\right)' = \frac{1}{(1+2i\pi\nu)^2}$

2 On transforme la fonction et on utilise la propriété : $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-2i\pi\nu t_0} F(\nu)$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{t^2 + 2at + b^2} = \frac{1}{(t+a)^2 + b^2 - a^2} \\ \Rightarrow F(\nu) &= \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}} e^{2i\pi\nu a} \exp\left[-2\pi|\nu|\sqrt{b^2 - a^2}\right] \end{aligned}$$

3 On a l'identité : $-at^2 + bt = -a(t - b/2a)^2 + b^2/4a$. En utilisant la propriété : $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-2i\pi\nu t_0} F(\nu)$ on obtient

$$\mathcal{F}\{e^{-at^2+bt}\} = e^{b^2/4a} \mathcal{F}\{e^{-a(t-b/2a)^2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a} e^{-\pi^2\nu^2/a} e^{-i\pi\nu b/a}$$

4 Transformée du « triangle » : on utilise la parité

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\Lambda_T(t)\} &= 2 \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos(2\pi\nu t) dt \stackrel{IPP}{=} 2 \frac{1 - \cos 2\pi\nu T}{(2\pi\nu)^2 T} \\ &= T \left[\frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T} \right]^2 = T \operatorname{sinc}^2(\nu T)\end{aligned}$$

5 On explicite l'intégrale de Fourier et on utilise l'imparité de la fonction $f_5(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f_5(t)\} &= 2ia \int_0^{T/2} \sin(2\pi\nu t) dt = 2ia \frac{1 - \cos \pi\nu T}{2\pi\nu} \\ &= 2ia \frac{\sin^2\left(\pi\nu \frac{T}{2}\right)}{\pi\nu}\end{aligned}$$

Remarque : $f_5(t)|_{a=1/T} = \Lambda'_T(t) \Rightarrow F_5(\nu)|_{a=1/T} = 2i\pi\nu\mathcal{F}\{\Lambda_T(t)\}$.

6 Remarquons que : $\frac{1}{t+i} \notin \mathcal{L}^1$ mais $\in \mathcal{L}^2$; l'intégrale de Fourier doit donc être prise en partie principale à l'infini .

$$\begin{aligned}\frac{1}{t+i} &= \frac{t}{t^2+1} - i \frac{1}{t^2+1} \Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t+i}\right\} = \mathcal{F}\left\{t \frac{1}{t^2+1}\right\} - i \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+1}\right\} \\ &= \frac{-1}{2i\pi} \left(\pi e^{-2\pi|\nu|}\right)' - i \pi e^{-2\pi|\nu|} = -i \pi e^{-2\pi|\nu|} [1 + \operatorname{sign}(\nu)] \\ &= -2i \pi e^{-2\pi|\nu|} u(\nu)\end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Les propriétés de la transformation de Fourier utilisées de façon pertinente permettent d'élargir le champ d'application de la table des transformées des fonctions de base.

2.2 1 On définit $h(t) = e^{-at}u(t)$; alors $f(t) = h(t) + h(-t)$ et $g(t) = h(t) - h(-t)$;

$$H(\nu) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \frac{1}{2i\pi\nu + a} ; \text{ on en déduit}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = H(\nu) + H(-\nu) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}$$

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = H(\nu) - H(-\nu) = \frac{-4i\pi\nu a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}$$

2 On utilise la transformée de Fourier inverse

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2} e^{2i\pi\nu x} d\nu \stackrel{t=2\pi\nu}{=} \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{a^2 + t^2} dt = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{a^2 + t^2} dt \\
 &\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{a^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2a} f(\omega) = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\omega|} \\
 g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-4i\pi\nu a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2} e^{2i\pi\nu x} d\nu \stackrel{t=2\pi\nu}{=} -\frac{ia}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{itx}}{a^2 + t^2} dt = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t \sin(tx)}{a^2 + t^2} dt \\
 &\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{t \sin(\omega t)}{a^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2a} g(\omega)
 \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La transformation de Fourier est utilisée ici pour évaluer simplement des intégrales dont le calcul direct fait appel à des méthodes plus élaborées (méthode du plan complexe, développée au chapitre 4).

2.3 Si ϕ est à décroissance rapide elle est dans \mathcal{L}^1 et donc sa transformée de Fourier est définie continue bornée $\forall \nu$ et tend vers zéro à l'infini. C'est aussi le cas de $t^n \phi^{(p)}$. Soit $\psi(\nu) = \mathcal{F}\{\phi(t)\}$

$$\mathcal{F}\{t^n \phi^{(p)}\} = \left(-\frac{1}{2i\pi}\right)^n [(2i\pi\nu)^p \psi(\nu)]^{(n)}$$

La fonction $\nu^p \psi^{(n)}$ doit être définie continue et tendre vers zéro à l'infini $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$; ψ est donc à décroissance rapide.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Ce résultat sera exploité au chapitre 5 pour définir la transformée de Fourier des distributions tempérées.

2.4 Dans cet exercice on utilise $\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \times \mathcal{F}\{g\}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1} \quad \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2 + a^2} * \frac{1}{t^2 + b^2}\right\} &= \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\nu|} \frac{\pi}{b} e^{-2\pi b|\nu|} \\
 &= \frac{\pi^2}{ab} e^{-2\pi(a+b)|\nu|} \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\rightarrow} \frac{\pi(a+b)}{ab} \frac{1}{t^2 + (a+b)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{2} \quad \mathcal{F}\{e^{-at^2} * e^{-bt^2}\} &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2\nu^2/a} \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\pi^2\nu^2/b} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi^2}{ab}} e^{-\pi^2\nu^2(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})} \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\rightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{(a+b)}} \exp\left(-\frac{ab}{a+b}t^2\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3 } \mathcal{F} \left\{ t e^{-\pi t^2} * \Pi_2(t) \right\} &= \frac{-1}{2i\pi} \frac{d}{d\nu} \left(e^{-\pi\nu^2} \right) 2 \sin c(2\nu) = \frac{-1}{2i\pi} (-2\pi\nu) e^{-\pi^2\nu^2} \left[\frac{e^{2i\pi\nu} - e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu} \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(e^{-\pi\nu^2+2i\pi\nu} - e^{-\pi\nu^2-2i\pi\nu} \right) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} -\frac{1}{2\pi} e^{-\pi(t+1)^2} + \frac{1}{2\pi} e^{-\pi(t-1)^2} \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

On remarque que l'utilisation de la transformation de Fourier simplifie grandement l'évaluation du produit de convolution par rapport au calcul direct de l'intégrale de convolution (effectuer ces calculs directs dans les trois cas ci-dessus).

2.5 1 La fonction $f(t)$ est paire et a pour équation pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 \text{ pour } t \in [0, T - \tau] \\ &= -\frac{1}{\tau} (t - T) \text{ pour } t \in [T - \tau, T] \\ &= 0 \text{ pour } t \geq T \end{aligned}$$

a) En utilisant la parité sa transformée de Fourier s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ f(t) \} &= 2 \int_0^T f(t) \cos(2\pi\nu t) dt \\ &= 2 \left\{ \int_0^{T-\tau} \cos(2\pi\nu t) dt - \frac{1}{\tau} \int_{T-\tau}^T (t - T) \cos(2\pi\nu t) dt \right\} \end{aligned}$$

La première intégrale donne $\frac{\sin(2\pi\nu(T - \tau))}{2\pi\nu}$. On intègre la deuxième par parties

$$\begin{aligned} \int_{T-\tau}^T (t - T) \cos(2\pi\nu t) dt &= (t - T) \frac{\sin(2\pi\nu t)}{2\pi\nu} \Big|_{T-\tau}^T - \frac{1}{2\pi\nu} \int_{T-\tau}^T \sin(2\pi\nu t) dt \\ &= \tau \frac{\sin(2\pi\nu(T - \tau))}{2\pi\nu} + \frac{\cos(2\pi\nu T) - \cos(2\pi\nu(T - \tau))}{(2\pi\nu)^2} \end{aligned}$$

En regroupant on obtient

$$\mathcal{F} \{ f(t) \} = \frac{\cos(2\pi\nu(T - \tau)) - \cos(2\pi\nu T)}{2\pi^2\nu^2\tau}$$

b) Prenons la dérivée de f ; comme f est continue il n'y a pas de différence entre la dérivée au sens des fonctions et la dérivée au sens des distributions $f'(t)$ est impaire et

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \text{ pour } t \in [0, T - \tau] \\ &= -\frac{1}{\tau} \text{ pour } t \in [T - \tau, T] \\ &= 0 \text{ pour } t > T \end{aligned}$$

Chapitre 2 · Transformation de Fourier

Dérivons encore une fois, au sens des distributions (voir figure 2.3) c'est-à-dire en faisant apparaître à chaque discontinuité un δ de Dirac pondéré par le saut à la discontinuité :

$$f''(t) = \frac{1}{\tau} [\delta(t+T) - \delta(t+T-\tau) - \delta(t-T+\tau) + \delta(t-T)]$$

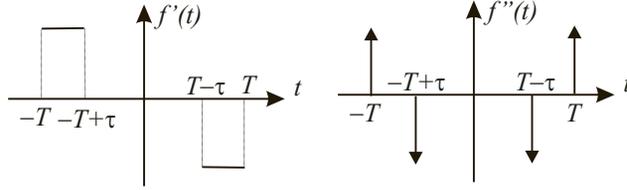


Figure 2.3

On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f''(t)\} &= -4\pi^2\nu^2\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\tau} [e^{2i\pi\nu T} - e^{2i\pi\nu(T-\tau)} - e^{-2i\pi\nu(T-\tau)} + e^{-2i\pi\nu T}] \\ &= \frac{2}{\tau} [\cos(2\pi\nu T) - \cos(2\pi\nu(T-\tau))] \end{aligned}$$

Attention ! Pour en déduire $\mathcal{F}\{f(t)\}$ il faut résoudre

$$-4\pi^2\nu^2\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{2}{\tau} [\cos(2\pi\nu T) - \cos(2\pi\nu(T-\tau))]$$

au sens des distributions. La solution générale est

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{2 \cos(2\pi\nu T) - \cos(2\pi\nu(T-\tau))}{-4\pi^2\nu^2} + \alpha\delta(\nu) + \beta\delta'(\nu)$$

(voir exercice 1.4 **3**). Comme f est une fonction de \mathcal{L}^2 il en est de même de sa transformée de Fourier ; on a donc $\alpha = \beta = 0$ et on a bien le même résultat qu'à **1**.

2 On peut réécrire (en utilisant $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \frac{\cos(2\pi\nu(T-\tau)) - \cos(2\pi\nu T)}{2\pi^2\nu^2\tau} = \frac{\sin(\pi\nu(2T-\tau)) \sin(\pi\nu\tau)}{\pi^2\nu^2\tau} \\ &= (2T-\tau) \frac{\sin(\pi\nu(2T-\tau))}{\pi\nu(2T-\tau)} \frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau} = \tau_w \frac{\sin(\pi\nu\tau_w)}{\pi\nu\tau_w} \frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau} \end{aligned}$$

où $\tau_w = (2T - \tau)$ représente la largeur du signal à mi-hauteur. On en déduit

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \tau_w \frac{\sin(\pi\nu\tau_w)}{\pi\nu\tau_w} \right\} &= \Pi_{\tau_w} \\ \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau} \right\} &= \frac{1}{\tau} \Pi_{\tau} \end{aligned} \right\} f(t) = \frac{1}{\tau} \Pi_{\tau} * \Pi_{\tau_w}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

On a ici un exemple de l'efficacité de certains calculs quand ils sont menés au sens des distributions plutôt qu'au sens habituel des fonctions. Il faut cependant être attentif à effectuer **tout le calcul** au sens des distributions. **2** permet d'établir que ce signal trapézoïdal est en fait le produit de convolution de deux fonctions porte dont les largeurs sont respectivement le temps de montée τ et la largeur à mi-hauteur τ_w .

2.6 1 Transformée de Fourier-cosinus de $f(t) = e^{-t}u(t)$:

$$\mathcal{F}_c \{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-t} \cos(2\pi vt) dt = \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-(1+2i\pi v)t} dt = \frac{1}{4\pi^2 v^2 + 1}$$

2 On veut calculer l'intégrale $I(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cos t dt$ où $x \in]0, 1[$. On a

$$\mathcal{F}_c \{t^{x-1}\} = \int_0^\infty t^{x-1} \cos(2\pi vt) dt \stackrel{u=2\pi vt}{=} \frac{1}{(2\pi v)^x} I(x)$$

D'après la formule de Plancherel

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt &= 4 \int_0^\infty \left[\frac{1}{4\pi^2 v^2 + 1} \right] \left[\frac{1}{(2\pi v)^x} I(x) \right] dv \\ \Gamma(x) &= 4I(x) \int_0^\infty \frac{1}{4\pi^2 v^2 + 1} \frac{1}{(2\pi v)^x} dv \\ \Rightarrow I(x) &= \frac{1}{4} \Gamma(x) \left[\int_0^\infty \frac{1}{4\pi^2 v^2 + 1} \frac{1}{(2\pi v)^x} dv \right]^{-1} \end{aligned}$$

Calculons cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{4\pi^2 v^2 + 1} \frac{1}{(2\pi v)^x} dv &\stackrel{u=4\pi^2 v^2}{=} \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{u^{-\frac{x+1}{2}}}{1+u} du = \frac{1}{4\pi} B\left(\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4 \sin(\pi \frac{1-x}{2})} = \frac{1}{4 \cos(\frac{\pi}{2}x)} \end{aligned}$$

On en déduit finalement

$$I(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cos t dt = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Gamma(x)$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La transformée de Fourier-cosinus (sinus) à l'image des séries de Fourier-cosinus ou sinus permet de résoudre des problèmes avec des conditions aux limites spécifiques (voir problème 2.1). Ici cette transformation est utilisée pour calculer une intégrale que l'on retrouvera au chapitre 4 avec les méthodes du plan complexe.

2.7 1 Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle en utilisant la transformation de Fourier.

$$\begin{aligned} y'' + 2\pi t y' + 4\pi y &= 0 \\ (2i\pi\nu)^2 Y(\nu) - 2\pi \frac{1}{2i\pi} [2i\pi\nu Y(\nu)]' + 4\pi Y(\nu) &= 0 \\ -\nu Y'(\nu) + (-2\pi\nu^2 + 1) Y(\nu) &= 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation différentielle est linéaire sans second membre. La solution est

$$Y(\nu) = K\nu e^{-\pi\nu^2} \rightarrow y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\nu)\} = K' \left(e^{-\pi t^2} \right)' = K'' t e^{-\pi t^2}$$

2 On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathcal{L}^2$ qui satisfassent l'équation et la condition

$$\begin{aligned} y'' + a \delta(t) y &= \lambda y \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

a) On utilise $y(t)\delta(t) = y(0)\delta(t) = \delta(t)$ et on prend la transformée de Fourier de l'équation résultante

$$\begin{aligned} -4\pi^2\nu^2 Y(\nu) + a &= \lambda Y(\nu) \\ \Rightarrow Y(\nu) &= \frac{a}{4\pi^2\nu^2 + \lambda} \end{aligned}$$

b) Comme $Y(\nu) \in \mathcal{L}^2$ on doit avoir $\lambda > 0$ (sinon $Y(\nu)$ aurait un pôle pour ν réel).

c) On prend la transformée de Fourier inverse en écrivant :

$$\begin{aligned} Y(\nu) &= \frac{a}{2\sqrt{\lambda}} \frac{2\sqrt{\lambda}}{4\pi^2\nu^2 + (\sqrt{\lambda})^2} \Rightarrow y(t) = \frac{a}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|t|} \\ y(0) &= 1 \Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{\lambda}} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{a^2}{4} \text{ et } y(t) = e^{-\frac{a}{2}|t|} \end{aligned}$$

d) On vérifie

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-a|t|/2} = e^{-at/2}u(t) + e^{at/2}u(-t) \\ y'(t) &= \frac{a}{2} \left[-e^{-at/2}u(t) + e^{at/2}u(-t) \right] + e^{-at/2}\delta(t) - e^{at/2}\delta(-t) \\ &= \frac{a}{2} \left[-e^{-at/2}u(t) + e^{at/2}u(-t) \right] \end{aligned}$$

où on a utilisé $g(t)\delta(t) = g(0)\delta(t)$ et $\delta(-t) = \delta(t)$.

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{a^2}{4} \left[e^{-at/2}u(t) + e^{at/2}u(-t) \right] - \frac{a}{2} \left[e^{-at/2}\delta(t) + e^{at/2}\delta(-t) \right] \\ &= \frac{a^2}{4} \left[e^{-at/2}u(t) + e^{at/2}u(-t) \right] - a\delta(t) = \frac{a^2}{4}y(t) - a\delta(t) \end{aligned}$$

$y(t) = e^{-a|t|/2}$ satisfait donc $y''(t) + a\delta(t) = \frac{a^2}{4}y(t) = \lambda y(t)$ avec $y(0) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La transformée de Fourier permet de résoudre certaines équations différentielles. La méthode est toutefois limitée ; il se peut que l'équation transformée soit aussi compliquée voire plus que l'équation de départ, ou alors qu'aucune des solutions de l'équation de départ n'admette de transformée de Fourier. Quand l'équation fait intervenir des δ de Dirac, la transformation de Fourier est souvent indispensable.

2.8 On remarque que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(u)}{4(x-u)^2+1} du = y(x) * \frac{1}{4x^2+1}$$

Prenons la transformée de Fourier de l'équation

$$Y(\nu)\mathcal{F}\left\{\frac{1}{4x^2+1}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2+2x+2}\right\}$$

on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{1}{4x^2+1}\right\} &= \frac{\pi}{2}e^{-\pi|\nu|} \\ \mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2+2x+2}\right\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{(x+1)^2+1}\right\} = \pi e^{-2\pi|\nu|} e^{2i\pi\nu} \end{aligned}$$

on obtient

$$Y(\nu) = 2e^{-\pi|\nu|} e^{2i\pi\nu} \rightarrow y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(x+1)^2 + \frac{1}{4}}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La transformation de Fourier est l'outil idéal pour résoudre ce genre d'équation.

2.9 Equation de la chaleur pour un fil infini :

$$\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} = \lambda^2 \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} \quad t > 0 \quad ; \quad z(x,0) = \exp(-x^2/x_0^2)$$

On prend la transformée de Fourier par rapport à x en définissant $Z(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(x,t)e^{-2i\pi kx} dx$.

On obtient

$$\begin{aligned} (2i\pi k)^2 Z(k,t) &= \lambda^2 \frac{\partial Z(k,t)}{\partial t} \quad t > 0 \\ \Rightarrow Z(k,t) &= Z_0(k) \exp\left(-\frac{4\pi^2 k^2}{\lambda^2} t\right) \end{aligned}$$

où $Z_0(k)$ est la constante arbitraire d'intégration qui est en fait ici une fonction de k . Cette fonction est déterminée par la condition initiale

$$\begin{aligned} Z(k, 0) &= Z_0(k) = \mathcal{F} \{ \exp(-x^2/x_0^2) \} = x_0 \sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 x_0^2 k^2) \\ \Rightarrow Z(k, t) &= x_0 \sqrt{\pi} \exp \left[-\pi^2 k^2 \left(\frac{4}{\lambda^2} t + x_0^2 \right) \right] \\ \Rightarrow z(x, t) &= \frac{x_0}{X_0(t)} \exp \left(-\frac{x^2}{X_0^2(t)} \right) \quad ; \quad X_0(t) = x_0 \sqrt{\left(1 + \frac{4t}{x_0^2 \lambda^2} \right)} \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

On a un problème à deux variables. Le domaine de variation en x : $]-\infty, \infty[$ suggère d'utiliser la transformée de Fourier en x . L'autre variable est alors « spectratrice ».

Corrigés des problèmes

Problème 2.1

V est solution de l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ ($x > 0, y > 0$) et satisfait les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= f(x) \text{ sur le bord inférieur} \\ V(0, y) &= 0 \text{ sur le bord gauche} \end{aligned}$$

1 La condition au bord en $x = 0$ suggère de prendre la transformée de Fourier-sinus par rapport à x :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, y) \rightarrow -4\pi^2 \nu^2 \widehat{V}(\nu, y) \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x, y) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} \widehat{V}(\nu, y)$$

La fonction \widehat{V} satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \widehat{V}(\nu, y) - 4\pi^2 \nu^2 \widehat{V}(\nu, y) = 0$$

La solution générale de cette équation est de la forme

$$\widehat{V}(\nu, y) = A(\nu) \exp(-2\pi\nu y) + B(\nu) \exp(2\pi\nu y)$$

2 On veut $\lim_{y \rightarrow \infty} V(x, y)$ borné ce qui entraîne $\lim_{y \rightarrow \infty} \widehat{V}(\nu, y)$ borné ; donc $B(\nu) \equiv 0$. Par ailleurs

$V(x, 0) = f(x) \Rightarrow \widehat{V}(\nu, 0) = \widehat{f}(\nu)$ où \widehat{f} est la transformée de Fourier-sinus de f . D'où

$$\widehat{V}(\nu, y) = \widehat{f}(\nu) \exp(-2\pi\nu y)$$

3 On en déduit que

$$\begin{aligned}
 V(x, y) &= 4 \int_0^\infty \widehat{V}(\nu, y) \sin(2\pi\nu x) d\nu = 4 \int_0^\infty \widehat{f}(\nu) \exp(-2\pi\nu y) \sin(2\pi\nu x) d\nu \\
 &= 4 \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x') \sin(2\pi\nu x') dx' \right\} \exp(-2\pi\nu y) \sin(2\pi\nu x) d\nu \\
 &= 4 \int_0^\infty f(x') \left\{ \int_0^\infty \exp(-2\pi\nu y) \sin(2\pi\nu x) \sin(2\pi\nu x') d\nu \right\} dx' \\
 &= 2 \int_0^\infty f(x') \left\{ \int_0^\infty \exp(-2\pi\nu y) [\cos [2\pi\nu(x - x')] - \cos [2\pi\nu(x + x')]] d\nu \right\} dx'
 \end{aligned}$$

En utilisant $\int_0^\infty \cos(at)e^{-bt} dt = \frac{b}{a^2 + b^2}$ on obtient

$$V(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_0^\infty f(x') \left[\frac{1}{(x - x')^2 + y^2} - \frac{1}{(x + x')^2 + y^2} \right] dx'$$

4 Dans le cas où $f(x) = V_0 = c^{te}$ on a

$$V(x, y) = \frac{y}{\pi} V_0 \int_0^\infty \left[\frac{1}{(x - x')^2 + y^2} - \frac{1}{(x + x')^2 + y^2} \right] dx' = \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{x}{y}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Il s'agit ici d'un problème aux limites sur un domaine non borné. La représentation de la fonction recherchée en termes d'une transformée de Fourier-sinus en y permet d'implémenter automatiquement la condition en $x = 0$.

Problème 2.2

Le filtre « retard » a pour action de décaler le signal d'entrée d'une durée t_0 :

$$e(t) \rightarrow s(t) = e(t - t_0) \quad t_0 > 0$$

1 Gain complexe et réponse impulsionnelle de ce filtre : prenons la transformée de Fourier de l'équation du filtre.

$$S(\nu) = E(\nu)e^{-2i\pi\nu t_0} \Rightarrow \frac{S(\nu)}{E(\nu)} = G(\nu) = e^{-2i\pi\nu t_0} \Rightarrow h(t) = \delta(t - t_0)$$

2 On réalise une approximation du filtre retard par le filtre de gain complexe

$$G(\nu) = e^{-2i\pi\nu t_0} \Pi_\sigma(\nu)$$

Chapitre 2 · Transformation de Fourier

Dans la table on a $\mathcal{F}\{\text{sinc}(t)\} = \Pi_1(\nu)$ or $\Pi_\sigma(\nu) = \Pi_1(\frac{\nu}{\sigma}) = \sigma \frac{1}{\sigma} \Pi_1(\frac{\nu}{\sigma})$. Comme $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\nu}{a}\right)\right\} = f(at)$ on a $\mathcal{F}^{-1}\{\Pi_\sigma(\nu)\} = \sigma \text{sinc}(\sigma t)$ (on peut aussi calculer l'intégrale de Fourier inverse). Donc

$$h_\sigma(t) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2i\pi\nu t_0}\Pi_\sigma(\nu)\} = \sigma \text{sinc}[\sigma(t - t_0)]$$

- 3** On envoie dans le filtre de la question **2** le signal créneau $\Pi_\tau(t)$ (on prendra $0 < \tau < t_0$).
a) Le signal de sortie est de la forme

$$\begin{aligned} y(t) &= h_\sigma(t) * \Pi_\tau(t) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} h_\sigma(t - t') dt' \\ &= \sigma \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{\sin[\pi\sigma(t - t' - t_0)]}{\pi\sigma(t - t' - t_0)} dt' \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $u = \pi\sigma(t - t' - t_0)$. On obtient

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi\sigma(t-t_0-\tau/2)}^{\pi\sigma(t-t_0+\tau/2)} \frac{\sin u}{u} du \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \text{Si}\left[\pi\sigma\left(t - t_0 + \frac{\tau}{2}\right)\right] - \text{Si}\left[\pi\sigma\left(t - t_0 - \frac{\tau}{2}\right)\right] \right\} \end{aligned}$$

- b)** Considérons la représentation intégrale ci-dessus de $y(t)$. Quand $\sigma \rightarrow \infty$ les bornes d'intégration tendent vers $\pm\infty$ selon le signe de $(t - t_0 \pm \frac{\tau}{2})$. Si les deux bornes tendent vers la même valeur l'intégrale est nulle. Elle est non nulle uniquement si $t - t_0 + \frac{\tau}{2} > 0$ et $t - t_0 - \frac{\tau}{2} < 0$ ce qui correspond à $|t - t_0| < \frac{\tau}{2}$. Dans cet intervalle la fonction vaut $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = 1$.
 Donc

$$y(t) = \Pi_\tau(t - t_0)$$

Dans cette limite le filtre a donc le même effet que le filtre retard de **1**, ce qui est cohérent avec le fait que dans cette limite le gain complexe des deux filtres devient identique.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

La transformation de Fourier est omniprésente en théorie du filtrage linéaire car l'action d'un filtre est souvent définie à partir du domaine fréquentiel et donc la transformée de Fourier (inverse) est nécessaire pour revenir au domaine temporel (**2**). Par ailleurs l'action d'un filtre s'exprime par un produit de convolution dont on a vu qu'il était souvent plus simple à calculer à l'aide de la transformation de Fourier. On aurait pu utiliser cette méthode dans **3** (a) mais le gain de calcul est ici non significatif.

Problème 2.3

1 $G(\nu)$ périodique de période ν_0 (pulsation $\omega = 2\pi/\nu_0$) ; d'autre part, comme $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ sa transformée de Fourier $F(\nu)$ est continue. On doit donc avoir $F(\pm\nu_0/2) = 0$ ce qui entraîne que $G(\nu)$ est continue. Elle admet donc un développement en série de Fourier uniformément convergent sur \mathbb{R} .

$$G(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in2\pi\nu/\nu_0}$$

$$c_n = \frac{1}{\nu_0} \int_{-\nu_0/2}^{\nu_0/2} G(\nu) e^{in2\pi\nu/\nu_0} d\nu = \frac{1}{\nu_0} \int_{-\nu_0/2}^{\nu_0/2} F(\nu) e^{in2\pi\nu/\nu_0} d\nu$$

$F(\nu)$ est la transformée de Fourier de f donc

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = \int_{-\nu_0/2}^{\nu_0/2} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

En comparant avec l'intégrale ci-dessus qui définit c_n on en déduit $c_n = \frac{1}{\nu_0} f\left(\frac{n}{\nu_0}\right) = T_0 f(nT_0)$.

Dans l'intervalle $[-\nu_0/2, \nu_0/2]$ on a $G(\nu) \equiv F(\nu)$; on en déduit une représentation de F par la série de Fourier

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_0 f(nT_0) e^{-in2\pi\nu/\nu_0} \quad ; \quad \nu \in [-\nu_0/2, \nu_0/2]$$

2 De **1** on déduit

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\nu)\} = \int_{-\nu_0/2}^{\nu_0/2} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = \int_{-\nu_0/2}^{\nu_0/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_0 f(nT_0) e^{-in2\pi\nu/\nu_0} \right) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

La série converge uniformément, on peut donc intégrer terme à terme :

$$f(t) = T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_0) \int_{-\nu_0/2}^{\nu_0/2} e^{-in2\pi\nu/\nu_0} e^{i2\pi\nu t} d\nu = T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_0) \frac{e^{2i\pi\nu(t-n/\nu_0)}}{2i\pi(t-n/\nu_0)} \Big|_{-\nu_0/2}^{\nu_0/2}$$

Ce qui donne finalement

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_0) \frac{\sin[\pi\nu_0(t-nT_0)]}{\pi\nu_0(t-nT_0)} \quad \forall t$$

3 D'après la table on a

$$\mathcal{F}\{\Lambda_T(t)\} = T \operatorname{sinc}^2(\nu T)$$

Chapitre 2 · Transformation de Fourier

En prenant $T = \frac{1}{\pi}$ on a

$$\mathcal{F}\left\{\Lambda_{\frac{1}{\pi}}(t)\right\} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \nu}{\nu}\right)^2$$

La lecture inversée de la table de transformées de Fourier donne dans ce cas

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right\} = \Lambda_{\frac{1}{\pi}}(\nu) \Rightarrow \mathcal{F}\left\{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right\} = \pi \Lambda_{\frac{1}{\pi}}(\nu).$$

4 La fonction $f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$ est bien élément de $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ et a un spectre limité entre $-\frac{1}{\pi}$ et $\frac{1}{\pi}$. Elle satisfait donc les conditions du théorème de Shannon avec $\nu_0 = \frac{2}{\pi}$ c'est-à-dire avec $T_0 = \frac{\pi}{2}$ Donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n\frac{\pi}{2}}\right)^2 \frac{\sin(2t - n\pi)}{(2t - n\pi)} \\ &= \sin(2t) \left\{ \frac{1}{2t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n\frac{\pi}{2}}\right)^2 (-1)^n \left[\frac{1}{(2t - n\pi)} + \frac{1}{(2t + n\pi)} \right] \right\} \end{aligned}$$

où on a extrait de la somme le terme $n = 0$ et on a replié les $n < 0$ en changeant $n \rightarrow -n$. Le terme $\left(\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n\frac{\pi}{2}}\right)^2$ vaut 0 pour n pair et $\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2}$ pour $n = 2k + 1$. On en déduit

$$\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 = \sin(2t) \left\{ \frac{1}{2t} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4t}{\frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2 [4t^2 - (2k+1)^2 \pi^2]} \right\}$$

En divisant par $\sin(t) \cos(t)$ et donc en restreignant $t \neq n\frac{\pi}{2}$ et en réarrangeant l'expression, on obtient :

$$\tan(t) = t - \frac{8t^3}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 [t^2 - (2k+1)^2 \frac{\pi^2}{4}]} \quad t \neq n\frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{Z}^*$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Cette démonstration du théorème de Shannon (il en existe d'autres) repose sur le lien formel entre transformation de Fourier et série de Fourier pour une fonction à spectre limité. L'application de ce théorème qui est développée à 4 conduit à une représentation approchée de la fonction $\tan(t)$ qui est très précise : pour $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en tronquant la série à son seul premier terme on a un taux d'erreur inférieur à 0,4 %.

Problème 2.4

1 Utilisons la propriété de la transformation de Fourier d'une dérivée et la formule de Parseval

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = 2i\pi\nu F(\nu) \implies \text{Parseval} \implies \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 |F(\nu)|^2 d\nu$$

2 Appliquons l'inégalité de Schwartz

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)f'(t)dt \right|^2 \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 dt \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt \right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 dt = E\tau^2 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 |F(\nu)|^2 d\nu = 4\pi^2 E\sigma^2$$

Par ailleurs

$$\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}t[f(t)]^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = -\frac{1}{2}E$$

Finalement

$$\frac{1}{4}E^2 \leq E\tau^2 \times 4\pi^2 E\sigma^2 \implies \sigma\tau \geq \frac{1}{4\pi}$$

3 $f(t) = e^{-t^2/4t_0^2} \implies E = t_0\sqrt{2\pi}$ (voir table : transformée de Fourier de la gaussienne pour $\nu = 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2t_0^2} dt \stackrel{IPP}{=} -t_0^2 [te^{-t^2/2t_0^2}]_0^{\infty} + t_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2t_0^2} dt = t_0^2 E$$

$$\implies \tau = t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 |F(\nu)|^2 d\nu = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt \text{ voir 1,}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{4t_0^4} e^{-t^2/2t_0^2} dt = \frac{1}{16\pi^2 t_0^2} E$$

$$\implies \sigma = \frac{1}{4\pi t_0} \quad ; \quad \sigma\tau = \frac{1}{4\pi}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Cette propriété de la transformation de Fourier qui fait que le produit des largeurs « temporelle » et « spectrale » d'une fonction de \mathcal{L}^2 est constant est largement utilisée en traitement du signal ; elle est aussi à la base du principe d'incertitude d'Heisenberg en mécanique quantique.

Problème 2.5

1 Paquet d'ondes gaussien en électromagnétisme

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega - \omega_0)^2 / \delta\omega^2} e^{i((\omega/c + ik'')x - \omega t)} d\omega \\ &= e^{-k''x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega - \omega_0)^2 / \delta\omega^2} e^{i\omega(x/c - t)} d\omega\end{aligned}$$

On pose $\tau = x/c - t$; on a $\psi(x, t) = e^{-k''x} \mathcal{F}_\tau^{-1} \left\{ e^{-(\omega - \omega_0)^2 / \delta\omega^2} \right\} \Big|_{\tau=x/c-t}$.

On utilise les résultats de la transformée de Fourier symétrique en pulsation ; on en déduit $\mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-(\omega - \omega_0)^2 / \delta\omega^2} \right\} = \frac{\delta\omega}{\sqrt{2}} e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{1}{4}(\delta\omega)^2 t^2}$ d'où

$$\psi(x, t) = \frac{\delta\omega}{\sqrt{2}} e^{-k''x} e^{i\omega_0(t-x/c)} e^{-\frac{1}{4}(\delta\omega)^2(t-x/c)^2}$$

Si $k'' > 0$ on se restreint à $x \geq 0$ pour que le terme d'amortissement $e^{-k''x}$ ait un sens.

2 Paquet d'ondes gaussien relatif à une particule libre en mécanique quantique :

$$\psi(x, t) = \left(\frac{\delta^2}{4\pi^3} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\delta^2(k-k_0)^2} e^{i(kx - \omega t)} dk \quad \text{avec } \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

a) On a, à l'instant $t = 0$:

$$\begin{aligned}\psi(x, 0) &= \left(\frac{\delta^2}{4\pi^3} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\delta^2(k-k_0)^2} e^{ikx} dk = \left(\frac{\delta^2}{4\pi^3} \right)^{1/4} \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-\frac{1}{2}\delta^2(k-k_0)^2} \right\} \\ &= \left(\frac{\delta^2}{4\pi^3} \right)^{1/4} \frac{\sqrt{2\pi}}{\delta} e^{ik_0 x} e^{-x^2/2\delta^2} = \left(\frac{1}{\pi\delta^2} \right)^{1/4} e^{ik_0 x} e^{-x^2/2\delta^2}\end{aligned}$$

On a $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, 0)|^2 dx = \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\delta^2} dx = 1$.

b) Déterminer la fonction $\psi(x, t)$.

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \left(\frac{\delta^2}{4\pi^3} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2}\delta^2(k - k_0)^2 + ikx - i\frac{\hbar k^2}{2m}t \right\} dk \\ &= \left(\frac{\delta^2}{4\pi^3} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2}\delta^2 k'^2 + i(k' + k_0)x - i\frac{\hbar(k' + k_0)^2}{2m}t \right\} dk' \\ &= \left(\frac{\delta^2}{4\pi^3} \right)^{1/4} \exp \left(ik_0 x - i\frac{\hbar k_0^2}{2m}t \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\left(\frac{1}{2}\delta^2 + i\frac{\hbar t}{2m} \right) k^2 + ik \left(x - \frac{\hbar k_0}{2m}t \right) \right\} dk\end{aligned}$$

Posons

$$\Delta^2 = \delta^2 + i \frac{\hbar t}{m} \text{ et } v_0 = \frac{\hbar k_0}{2m}$$

On peut alors mettre l'expression ci-dessus sous la forme

$$\psi(x, t) = \left(\frac{\delta^2}{4\pi^3} \right)^{1/4} \exp [ik_0 (x - v_0 t)] \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-\frac{1}{2}\Delta^2(k-k_0)^2} \right\}_{x-v_0 t}$$

On en déduit

$$\psi(x, t) = \left(\frac{\delta^2}{4\pi^3} \right)^{1/4} \exp [ik_0 (x - v_0 t)] \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\delta^2 + i \frac{\hbar t}{m}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - v_0 t)^2}{\left(\delta^2 + i \frac{\hbar t}{m} \right)} \right]$$

Dans cette expression apparaissent des termes de la forme $\sqrt{a+ib}$ et $\exp\left(\frac{r}{a+ib}\right)$. Quand on prend le module on a

$$\left| \sqrt{a+ib} \right| = (a^2 + b^2)^{1/4} \quad \text{et} \quad \left| \exp \left(\frac{r}{a+ib} \right) \right| = \exp \left(\frac{ar}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

On obtient donc

$$|\psi(x, t)| = \left(\frac{\delta^2}{\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\left[\delta^4 + \left(\frac{\hbar t}{m} \right)^2 \right]^{1/4}} \exp \left[-\frac{\delta^2}{2} \frac{(x - v_0 t)^2}{\delta^4 + \left(\frac{\hbar t}{m} \right)^2} \right]$$

Si on pose

$$\sigma_0(t) = \sqrt{\delta^2 + \left(\frac{\hbar t}{m\delta} \right)^2} \quad \text{et} \quad v_0 = \frac{\hbar k_0}{m}$$

on obtient une expression simple pour le module carré de la fonction d'onde (densité de probabilité) :

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{\sigma_0(t)\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{(x - v_0 t)^2}{\sigma_0^2(t)} \right]$$

On vérifie sur cette dernière expression que $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Ce concept physique de paquets d'ondes (planes) s'exprime directement en termes de la transformation de Fourier. Les propriétés spatio-temporelles des paquets d'ondes gaussiens (propagation, atténuation, élargissement) reposent simplement sur le fait que la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne.

3

TRANSFORMATION DE LAPLACE

RAPPELS DE COURS

a) Définitions

La transformée de Laplace d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par l'intégrale de Laplace

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

On note $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

On appliquera la transformation de Laplace aux fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :

- f est *causale* c'est-à-dire telles que $f(t) \equiv 0 \quad \forall t < 0$. En effet la partie \mathbb{R}^- du domaine de définition de f n'intervient pas dans l'intégrale de Laplace. On suppose donc que la fonction y est nulle¹.
- f est localement sommable sur \mathbb{R}^+ , c'est-à-dire sommable sur tout intervalle *fermé borné* de \mathbb{R}^+ .
- f est de classe exponentielle, c'est-à-dire $\exists \sigma \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ tels que $t \geq T \Rightarrow |f(t)| \leq Be^{\sigma t}$ avec $B > 0$.

Une fonction ayant ces propriétés est dite de classe \mathcal{L} .

La transformée de Laplace est une fonction de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et l'étude de ses propriétés dans le plan complexe repose sur la théorie des fonctions analytiques (chapitre 4). C'est le cas des deux propriétés suivantes :

- *Propriété de $F(p)$* : si la fonction $f(t)$ est de classe \mathcal{L} il existe un réel σ_0 appelé *abscisse de sommabilité* tel que sa transformée de Laplace $F(p)$ est analytique dans le *demi-plan* $\text{Re } p > \sigma_0$ et satisfait $\lim_{\substack{|p| \rightarrow \infty \\ \text{Re } p > \sigma_0}} |F(p)| = 0$.
- *Transformation de Laplace inverse*
Soit $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique dans un *demi-plan* $\text{Re } p > \sigma_0$ et satisfaisant $\lim_{\substack{|p| \rightarrow \infty \\ \text{Re } p > \sigma_0}} |F(p)| = 0$;

1. La transformation de Laplace est utilisée en physique pour étudier des phénomènes *transitoires*, c'est-à-dire pour étudier l'évolution temporelle de phénomènes à partir de l'instant de leur naissance, $t = 0$. On suppose que le phénomène n'existe pas avant et donc que la fonction qui le décrit est nulle.

alors la fonction définie par

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta} F(z) e^{zt} dz$$

où Δ est un chemin rectiligne $\operatorname{Re} z = \sigma > \sigma_0$, est une fonction causale telle que $\mathcal{L}\{f\} = F$. On note $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$; c' est la *transformée de Laplace inverse* de F . L'intégrale complexe qui apparaît dans cette définition est appelée intégrale de Bromwich-Wagner.

Dans ce chapitre nous nous restreindrons désormais à p réel.

b) Deux théorèmes

- *Théorème de la valeur initiale*

Si $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+)$ bornée, alors

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+)$$

- *Théorème de la valeur finale*

Si $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ est bornée, alors

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

c) Propriétés de la transformation de Laplace

	$f(t)$	$F(p)$
Linéarité	$af + bg$	$aF + bG$
Changement d'échelle ($a > 0$)	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
Décalage temporel	$f(t - t_0)u(t - t_0)$	$e^{-pt_0} F(p)$
Décalage / p	$e^{at} f(t)$	$F(p - a)$
Dérivation/ t	$f^{[n]}(t)$	$p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0^+)$
Dérivation/ p	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$
Intégration/ t	$\int_0^t f(t') dt'$	$\frac{F(p)}{p}$
Intégration/ p	$\frac{f(t)}{t} \quad (f(0) = 0)$	$\int_p^\infty F(p') dp'$
Périodicité temporelle (sur \mathbb{R}^+)	f T -périodique	$\frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt$
Convolution	$f(t) * g(t)$	$F(p)G(p)$

d) Transformée des fonctions usuelles ($p > \sigma_0$)

$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$
$u(t)$	$\frac{1}{p}$ $\sigma_0 = 0$	$\delta^{(n)}$	p^n
$e^{at} u(t)$	$\frac{1}{p-a}$ $\sigma_0 = a$	$t^\alpha u(t), \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$ $\sigma_0 = 0$
$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$ $\sigma_0 = 0$	$\cosh(bt) u(t)$	$\frac{p}{p^2 - b^2}$ $\sigma_0 = b $
$\sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ $\sigma_0 = 0$	$\sinh(bt) u(t)$	$\frac{b}{p^2 - b^2}$ $\sigma_0 = b $

ÉNONCÉS DES EXERCICES

3.1 Transformées de Laplace

Déterminer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

1 $t^3 e^{3t} u(t)$

2 $|\sin(\omega t)| u(t)$

3 $\frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}} u(t)$

4 $\frac{1}{(t+a)} u(t) \quad a > 0$

5 $\ln t u(t)$ On rappelle $\Gamma'(1) = -\gamma$

6 $\text{Si}(t) u(t)$

7 $\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-a^2/t} u(t)$

8 $E(t) u(t)$ (partie entière)

3.2 Transformées de Laplace inverse

Déterminer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

1 $\frac{2p^2 - 4}{p^3 + 3p^2 + 7p + 5}$

2 $\frac{(p^3 + 1)}{p^2 + 1}$

3 $\frac{\ln p}{p}$

4 $\ln \frac{p+a}{p+b} \quad 0 < b < a$

5 e^{-p}

6 $\frac{\pi}{(p^2 + \pi^2)(1 - e^{-p})}$

3.3 Problèmes aux limites

À l'aide de la transformation de Laplace résoudre :

$$\mathbf{1} \quad -ty'' + 2y' + ty = 0 \quad y(1) = 0; y'(1) = 1$$

$$\mathbf{2} \quad ty'' + 2y' + 4ty = 1 \quad y(0) = 0$$

3.4 Oscillateur excité par un signal périodique

À l'aide de la transformation de Laplace résoudre :

$$y'' + \pi^2 y = \pi^2 f \quad y(0) = y'(0) = 0$$

où f est le signal causal semi-périodique ($f(t+4) = f(t), \forall t \geq 0$) défini sur $]0, 4[$ par :

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 & 0 < t < 1 \\ &= 2 & 1 < t < 2 \\ &= 1 & 2 < t < 3 \\ &= 0 & 3 < t < 4 \end{aligned}$$

Tracer le graphe de la solution.

3.5 Equation intégro-différentielle

Une fonction $x(t)$ définie continue pour $t > 0$ et de classe exponentielle satisfait l'équation

$$te^t x'(t) + \int_0^t e^{t'} x(t') dt' = te^t \quad t \geq 0$$

Trouver la solution qui satisfait $x(0) = 1$.

3.6 Système à contre-réaction

Un système à contre-réaction est régi par l'équation

$$y(t) = x(t - \tau) - k y(t - \tau) \quad k \in]0, 1[$$

1 Déterminer la fonction de transfert du système $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ où $X(p)$ et $Y(p)$ sont les transformées de Laplace de $x(t)$ et $y(t)$ respectivement.

2 Trouver la réponse du système à un échelon unité $x(t) = u(t)$. Tracer le graphe de y pour $k = 0,5$ et pour $k = 1$.

ÉNONCÉS DES PROBLÈMES

Problème 3.1 Oscillateurs couplés

Les petites amplitudes d'oscillation de deux oscillateurs couplés satisfont le système différentiel :

$$y_1''(t) + \omega^2 y_1(t) + k y_2''(t) = h(t)$$

$$y_2''(t) + \omega^2 y_2(t) + k y_1''(t) = 0$$

où $k \in]0, 1[$ est l'indice de couplage et $h(t)$ la sollicitation extérieure. Les conditions initiales sont :

$$y_1(0) = a \quad ; \quad y_1'(0) = 0$$

$$y_2(0) = b \quad ; \quad y_2'(0) = 0$$

À l'aide de la transformation de Laplace déterminer la solution dans les deux cas suivants :

- 1 oscillations libres $a \neq 0, b \neq 0; h(t) \equiv 0$;
- 2 oscillations forcées $a = b = 0; h(t) = \cos \omega_0 t$.

Problème 3.2 Équation intégrale

- 1 Soit τ un nombre réel positif et $x(t)$ une fonction définie par

$$x(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

$$x(t) = n \quad \text{pour } (n-1)\tau \leq t < n\tau \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Déterminer sa transformée de Laplace $X(p)$.

- 2 On considère un filtre causal dont la sortie y est donnée par l'équation :

$$y'(t) + \omega^2 \int_0^t y(u) du = x(t)$$

où $\omega \in \mathbb{R}^{*+}$ et où la fonction d'entrée x est celle de 1.

- a) À l'aide de la transformation de Laplace, trouver une solution particulière qui satisfasse $y(0^+) = 0$ (le résultat sera exprimé sous la forme d'une série).
- b) Que devient cette solution pour $\omega = \frac{\pi}{\tau}$? Tracer son graphe.

Problème 3.3 Problème générique sur les lignes de transmission

On considère la propagation d'un signal électrique sur une ligne de transmission schématisée ci-contre (figure 3.1).

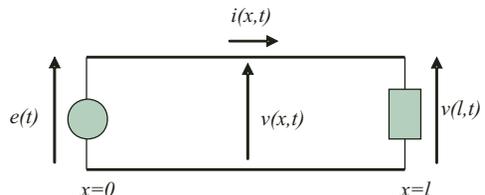


Figure 3.1

La tension $v(x, t)$ et le courant $i(x, t)$ en un point x de la ligne satisfont le couple d'équations aux dérivées partielles (équations des télégraphistes) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -L \frac{\partial i}{\partial t} - Ri \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= -C \frac{\partial v}{\partial t} - Gv\end{aligned}$$

et les conditions initiales $v(x, 0) = i(x, 0) = 0$. Les coefficients constants L , R , C et G sont les paramètres *linéiques* de la ligne. On soumet l'entrée de la ligne à la tension $e(t)$ de sorte que pour $t > 0$, $v(0, t) = e(t)$

On définit

$$V(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} v(x, t) dt \quad I(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} i(x, t) dt$$

Dans la suite on utilisera les notations

$E(p)$ transformée de Laplace de la tension d'entrée $e(t)$

$\gamma(p) = \sqrt{(Lp + R)(Cp + G)}$ facteur de propagation

$Z_c(p) = \sqrt{\frac{Lp + R}{Cp + G}}$ impédance caractéristique de la ligne

$c = 1/\sqrt{LC}$ vitesse de propagation du signal dans la ligne idéale

$R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$ résistance caractéristique de la ligne idéale

Établir que

$$\begin{aligned}V(x, p) &= A(p) e^{-\gamma(p)x} + B(p) e^{\gamma(p)x} \\ I(x, p) &= \frac{1}{Z_c(p)} [A(p) e^{-\gamma(p)x} - B(p) e^{\gamma(p)x}]\end{aligned}$$

Dans les problèmes qui suivent on pourra utiliser directement ce résultat.

Problème 3.4 Ligne finie sans perte ($R=G=0$) fermée sur une résistance

On ferme la ligne, de longueur l , sur une résistance R_u de sorte que v et i doivent satisfaire pour $t > 0$ la condition aux limites $v(l, t) = R_u i(l, t)$.

1 À l'aide des conditions aux limites, établir que

$$A(p) = E(p) \frac{1}{1 + K e^{-2pl/c}} \quad B(p) = E(p) \frac{K e^{-2pl/c}}{1 + K e^{-2pl/c}}$$

$$\text{où } K = \frac{R_u - R_c}{R_u + R_c}.$$

2 Montrer que

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n e\left(t - \frac{2nl + x}{c}\right) u\left(t - \frac{2nl + x}{c}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} K^n e\left(t - \frac{2nl - x}{c}\right) u\left(t - \frac{2nl - x}{c}\right)$$

3 Calculer explicitement la tension en bout de ligne $v(l, t)$ dans les trois cas $R_c \gg R_u$, $R_c \ll R_u$, $R_c \simeq R_u$, pour une entrée égale à un échelon de tension : $e(t) = V_0 u(t)$.

Problème 3.5 Ligne finie sans perte ($R = G = 0$) fermée sur une inductance

On ferme la ligne, de longueur l , sur une inductance L_0 de sorte que v et i doivent satisfaire pour $t > 0$ les conditions aux limites $v(l, t) = L_0 \frac{\partial}{\partial t} i(l, t)$. On veut déterminer la *réponse indicielle* de la ligne c'est-à-dire le potentiel en bout de ligne, $v(x = l, t)$, quand on applique à l'entrée un échelon de tension : $e(t) = V_0 u(t)$.

1 À l'aide des conditions aux limites, établir que

$$V(x = l, p) = \frac{V_0}{p \cosh(\tau p) + \alpha \sinh(\tau p)}$$

où on a posé $\tau = l/c$ et $\alpha = cL/L_0$.

2 On va maintenant chercher la transformée de Laplace inverse de cette expression.

a) Montrer que

$$V(x = l, p) = 2V_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(p - \alpha)^k}{(p + \alpha)^{k+1}} e^{-(2k+1)\tau p}$$

b) Montrer que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(p - \alpha)^n}{(p + \alpha)^{n+1}} \right\} = e^{-\alpha t} L_n(2\alpha t) u(t)$$

où $L_n(x)$ est un polynôme de degré n en x dont on explicitera les coefficients (ce sont les polynômes de Laguerre).

c) En déduire que

$$v(x = l, t) = 0 \quad \text{pour } 0 < t < \tau$$

$$= 2V_0 \sum_{k=0}^{N(t)} (-1)^k e^{-\alpha[t - (2k+1)\tau]} L_k[2\alpha(t - (2k+1)\tau)] \quad \text{pour } t \geq \tau$$

où $N(t)$ est l'entier dans \mathbb{N} qui satisfait $N(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} - 1 \right) < N(t) + 1$.

Problème 3.6 Ligne semi-infinie avec pertes

On suppose la ligne semi-infinie ; v et i doivent donc tendre vers une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, cette limite étant 0 dans le cas où il y a des pertes (R et G non négligeables).

1 Établir que

$$\begin{aligned} V(x, p) &= E(p) e^{-\gamma(p)x} \\ I(x, p) &= \frac{1}{Z_c(p)} E(p) e^{-\gamma(p)x} \end{aligned}$$

2 Inductance linéique négligeable : $L = 0$

a) Montrer que $\mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-a^2/t}}{t\sqrt{t}} u(t) \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-2a\sqrt{p}}$.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 3.1 7.

b) Établir que

$$\mathcal{L} \left\{ e^{-2ab} [1 + \operatorname{Erf}(a\sqrt{t} - b/\sqrt{t})] u(t) - e^{2ab} [1 - \operatorname{Erf}(a\sqrt{t} + b/\sqrt{t})] u(t) \right\} = \frac{2}{p} e^{-2b\sqrt{p+a^2}}$$

c) Déterminer $v(x, t)$ dans le cas où on applique un échelon à l'entrée de la ligne $e(t) = V_0 u(t)$.

3 Effet de peau

À hautes fréquences les ondes électromagnétiques qui se propagent dans un guide d'onde métallique ne pénètrent dans le conducteur que sur une zone étroite. L'épaisseur de cette zone de pénétration dépend de la fréquence : c'est l'effet de peau. La résistance et l'inductance linéiques de la ligne dépendent alors de la fréquence de l'onde et le facteur de propagation prend la forme suivante :

$$\gamma(p) = \frac{R}{2R_c} + \frac{k}{R_c\sqrt{2}}\sqrt{p} + \frac{p}{c}$$

où R , R_c et c sont les mêmes que dans la question précédente et k est une constante caractéristique de la ligne qui détermine la façon dont « l'épaisseur de peau » dépend de la fréquence. On néglige les pertes diélectriques : $G = 0$. Du fait des pertes ohmiques on a $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$.

À l'aide des résultats des questions précédentes déterminer $v(x, t)$ dans le cas où on applique un échelon à l'entrée de la ligne $e(t) = V_0 u(t)$.

DU MAL À DÉMARRER ?

3.1 2 Fonction périodique de période $T/2$.

3 Utiliser un développement en puissances de t .

5 Voir la fonction Γ' .

6 Passer par la dérivée.

7 Effectuer le changement de variable : $u = \frac{a}{\sqrt{t}} - \sqrt{pt}$.

Chapitre 3 · Transformation de Laplace

3.2 1 et 2 Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples.

3 Voir exercice 3.1 5.

4 Développer en puissance de $1/p$.

6 Développer le terme $\frac{1}{1 - e^{-\pi p}}$ en puissances de $e^{-\pi p}$.

3.3 1 Attention les conditions sur y sont en $t = 1$.

3.4 Pour prendre la transformée inverse de $Y(p)$ utiliser $\frac{1}{1 + e^{-2p}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2np}$. La solution s'exprime à l'aide d'une série de fonctions de Heaviside. Une analyse détaillée de cette fonction révèle un comportement simple.

3.5 Faire apparaître un produit de convolution.

3.6 Mêmes remarques que dans l'exercice 3.4.

Problème 3.1

Dans chaque cas combiner les équations transformées pour résoudre pour la somme et la différence des deux fonctions puis en déduire chaque fonction.

Problème 3.2

Utiliser $\frac{1}{1 - e^{-\tau p}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\tau p}$.

2 b) Le graphe de la solution fait apparaître une fonction simple.

Problème 3.3

Les fonctions $V(x, p)$ et $I(x, p)$ ne sont pas indépendantes ; elles sont reliées par les équations aux dérivées partielles ce qui fait qu'elles s'expriment en fonction de seulement deux fonctions arbitraires de p , $A(p)$ et $B(p)$.

Problème 3.4

Là encore remplacer $\frac{1}{1 - Ke^{-2pl/c}}$ par $\sum_{n=0}^{\infty} K^n e^{-2npl/c}$.

Problème 3.5

2 b) On remarque $\frac{(p - \alpha)^n}{(p + \alpha)^{n+1}} = \frac{p^n}{(p + 2\alpha)^{n+1}} \Big|_{p-\alpha} = \mathcal{L} \left\{ \left(e^{-2\alpha t} \frac{t^n}{n!} \right)^{(n)} \right\}$.

Problème 3.6

2 b) Calculer la transformée de Laplace de la dérivée de Erf $(a\sqrt{t} \pm b/\sqrt{t})$ en utilisant les résultats de 2 a).

3 On calcule $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{p} e^{-2a\sqrt{p}} \right)$ grâce au résultat de 2 a).

3.1 1 On utilise soit $\mathcal{L}\{t^3 f(t)\} = (-1)^3 F^{(3)}(p)$ avec $f(t) = e^{3t}u(t) \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p-3}$; ce qui donne $\mathcal{L}\{t^3 e^{3t}u(t)\} = \frac{6}{(p-3)^4}$; alternativement on peut utiliser $\mathcal{L}\{e^{3t}f(t)\} = F(p-3)$ avec $f(t) = t^3u(t) \Rightarrow F(p) = \frac{6}{p^4}$; ce qui donne évidemment le même résultat.

2 La fonction est périodique de période $\frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$:

$$\mathcal{L}\{|\sin(\omega t)|u(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-pT/2}} \int_0^{T/2} \sin(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{1 + e^{-pT/2}}{1 - e^{-pT/2}} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

où on a utilisé

$$\int e^{-at} \sin(bt) dt = \frac{e^{-at}}{a^2 + b^2} [-a \sin(bt) - b \cos(bt)]$$

3 On utilise le développement de $\cos u = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!}$

$$\frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n t^{n-1/2}}{(2n)!}$$

Ce développement a un rayon de convergence infini dans lequel il converge uniformément (série entière). On peut donc en prendre la transformée de Laplace terme à terme :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1/2)}{(2n)! p^{n+1/2}} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n (2n)! \sqrt{\pi}}{(2n)! 2^{2n} n! p^{n+1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-1/4p}$$

La fonction $F(p)$ a une singularité en $p = 0$; on a donc $\sigma_0 = 0$ qui est bien l'ordre exponentiel de $\frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$.

4 Écrivons l'intégrale de Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t+a}u(t)\right\} &= \int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{(t+a)} dt \stackrel{u=p(t+a)}{=} \int_{ap}^\infty \frac{e^{-(u-ap)}}{u} du \\ &= e^{ap} E_1(ap) \end{aligned}$$

5 Écrivons l'intégrale de Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\ln t u(t)\} &= \int_0^{\infty} \ln t e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \ln \frac{u}{p} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{p} \left[\int_0^{\infty} \ln u e^{-u} du - \ln p \int_0^{\infty} e^{-u} du \right] \\ &= \frac{\Gamma'(1) - \ln p}{p} = -\frac{\gamma + \ln p}{p}\end{aligned}$$

6 Passons par la dérivée de la fonction $f(t) = \text{Si}(t)u(t) \Rightarrow f'(t) = \frac{\sin t}{t}u(t)$. On utilise

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0^+) \text{ et } \mathcal{L}\left\{\frac{g(t)}{t}\right\} = \int_p^{\infty} G(p')dp'$$

$$\begin{aligned}pF(p) &= \int_p^{\infty} \frac{1}{p'^2 + 1} dp' = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg } p \\ \Rightarrow F(p) &= \frac{1}{p} \text{Arctg } \frac{1}{p}\end{aligned}$$

7 Écrivons l'intégrale de Laplace

$$F(p) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2/t-pt}}{\sqrt{t}} dt = e^{-2a\sqrt{p}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(a/\sqrt{t}-\sqrt{pt})^2}}{\sqrt{t}} dt$$

On pose $u = \frac{a}{\sqrt{t}} - \sqrt{pt}$; on a $u'(t) = -\frac{a}{2t\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{t}} < 0 \forall t \geq 0$. La fonction u est donc décroissante de $+\infty$ quand $t = 0$ à $-\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$.

On veut exprimer t en fonction de u :

$$\sqrt{p}(\sqrt{t})^2 + u\sqrt{t} - a = 0 \Rightarrow \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \left(-u \pm \sqrt{u^2 + 4a\sqrt{p}} \right);$$

il faut $\sqrt{t} \geq 0$ ce qui implique

$$\sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \left(-u + \sqrt{u^2 + 4a\sqrt{p}} \right) \text{ et } \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \left(-1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4a\sqrt{p}}} \right) du$$

L'intégrale devient

$$F(p) = \frac{e^{-2a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \left[1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4a\sqrt{p}}} \right] du$$

Le terme $\frac{u e^{-u^2}}{\sqrt{u^2 + 4a\sqrt{p}}}$ est intégrable et impair ; son intégrale sur $(-\infty, \infty)$ est donc nulle par symétrie. Il vient

$$F(p) = \frac{e^{-2a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2a\sqrt{p}}$$

8 Écrivons l'intégrale de Laplace

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} E(t) dt = \sum_{n \geq 1} n \int_n^{n+1} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-pn} (e^{-p} - 1) \\ &= \frac{1 - e^{-p}}{p} \left(-\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} \right)' = \frac{1 - e^{-p}}{p} \frac{e^{-p}}{(1 - e^{-p})^2} = \frac{1}{p(e^p - 1)} \end{aligned}$$

On peut obtenir la solution plus simplement en remarquant que : $E(t)u(t) = \sum_{n \geq 1} u(t - n)$

$$\mathcal{L}\{E(t)u(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-np}}{p} = \frac{1}{p} \left[\frac{1}{1 - e^{-p}} - 1 \right] = \frac{1}{p} \frac{e^{-p}}{1 - e^{-p}} = \frac{1}{p(e^p - 1)}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Cet exercice permet de passer en revue diverses méthodes pour obtenir la transformée de Laplace : table + propriétés dans les questions **1** et **6**, développement en puissance de t dans la **3**, calcul de l'intégrale de Laplace dans les autres questions. Noter l'utilisation des fonctions Γ et E_1 . Les fonctions f des questions **2** à **8** sont toutes à croissance lente ; leur ordre exponentiel est donc $\sigma_0 = 0$. On peut vérifier dans chaque cas que $F(p)$ est définie continue pour $p > \sigma_0 = 0$ (ou $\text{Re } p > 0$ dans **2**). Dans **1**, $\sigma_0 = 3$ et $F(p)$ est effectivement définie continue pour $p > 3$.

3.2 1 On décompose la fraction rationnelle en éléments simples

$$\frac{2p^2 - 4}{p^3 + 3p^2 + 7p + 5} = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{p+1} + \frac{5p-3}{p^2+2p+5} \right]$$

On va utiliser

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-at} \sin(\omega t) u(t)\} &= \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}\{e^{-at} \cos(\omega t) u(t)\} &= \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Pour faire apparaître des expressions de ce type on décompose

$$\frac{5p-3}{p^2+2p+5} = 5 \frac{(p+1)}{(p+1)^2+4} - 4 \frac{2}{(p+1)^2+4}$$

Chapitre 3 • Transformation de Laplace

Finalement

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2p^2 - 4}{p^3 + 3p^2 + 7p + 5} \right\} = \frac{1}{2} [-e^{-t} + 5e^{-t} \cos(2t) - 4e^{-t} \sin(2t)] u(t)$$

2 Là encore on décompose la fraction rationnelle

$$\frac{(p^3 + 1)}{p^2 + 1} = p + \frac{-p + 1}{p^2 + 1} = p - \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1}$$

On obtient directement l'original

$$f(t) = (\delta' - \cos t + \sin t) u(t)$$

3 On utilise le résultat de l'exercice précédent

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \ln t u(t) \} &= -\frac{\gamma + \ln p}{p} \\ \frac{\ln p}{p} &= \frac{\gamma + \ln p}{p} - \frac{\gamma}{p} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\ln p}{p} \right\} = -(\ln t + \gamma) u(t) \end{aligned}$$

4 On développe la fonction en puissance de $1/p$, pour $p > \sup(a, b)$

$$\ln \left| \frac{p+a}{p+b} \right| = \ln \left(1 + \frac{a}{p} \right) - \ln \left(1 + \frac{b}{p} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\left(\frac{a}{p} \right)^n - \left(\frac{b}{p} \right)^n \right]$$

On prend la transformation inverse de la série terme à terme

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \ln \left| \frac{p+a}{p+b} \right| \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{t} \left[\frac{(at)^n - (bt)^n}{n!} \right] u(t) = -\frac{1}{t} (e^{-at} - e^{-bt}) u(t)$$

5 On a simplement $e^{-p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \delta(t-1)$.

6 On développe le terme $\frac{1}{(1-e^{-p})} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np}$; il vient

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{(p^2 + \pi^2)(1 - e^{-p})} &= \frac{\pi}{(p^2 + \pi^2)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} \\ \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \pi(t-n) u(t-n) &= \sin \pi t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u(t-n) \end{aligned}$$

L'analyse de cette expression révèle une fonction simple : $\sin \pi t$ pour $t \in [2n, 2n + 1]$ ($n \in \mathbb{N}$) et 0 ailleurs (voir figure 3.2).

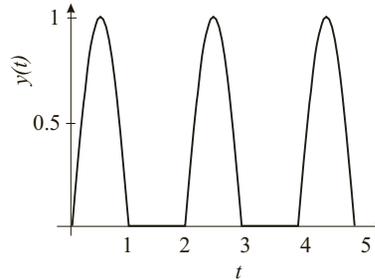


Figure 3.2

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Cet exercice permet de passer en revue diverses méthodes pour obtenir la transformée de Laplace inverse : décomposition des fractions rationnelles en éléments simples (méthode standard pour les filtres rationnels) dans **1** et **2**, développement en puissances de $1/p$ dans **4**, développement en puissance de e^{-ap} dans **6**. Le calcul de l'intégrale de Laplace inverse nécessite d'intégrer dans le plan complexe et sera étudiée au chapitre 4.

3.3 1 Prenons la transformation de Laplace de l'équation, en utilisant

$$\mathcal{L}\{y'\} = pY(p) - y(0^+) \quad \mathcal{L}\{y''\} = p^2Y(p) - py(0^+) - y'(0^+) \quad \mathcal{L}\{ty\} = -Y'(p)$$

$$-ty'' + 2y' + ty = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} (p^2Y(p) - py_0 - y_0')' + 2(pY(p) - y_0) - Y'(p) = 0$$

$$(p^2 - 1)Y' + 4pY = 3y_0$$

On obtient une équation linéaire du premier ordre dans la variable p . La solution de l'équation sans second membre est

$$Y(p) = \frac{K}{(p^2 - 1)^2}$$

On obtient une solution particulière de l'équation complète par variation de la constante ; on trouve :

$$Y_0(p) = y_0 \frac{p^3 - 3p}{(p^2 - 1)^2}$$

Dans ces expressions K et y_0 sont des constantes arbitraires. Finalement

$$Y(p) = \frac{K}{(p^2 - 1)^2} + y_0 \frac{p^3 - 3p}{(p^2 - 1)^2}$$

On décompose les fractions du membre de droite en éléments simples. On obtient :

$$Y(p) = \frac{1}{2} \left(y_0 - \frac{K}{2} \right) \left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \right] + \frac{1}{2} \left(y_0 + \frac{K}{2} \right) \left[\frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} \right]$$

Chapitre 3 • Transformation de Laplace

Comme $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p \pm 1}\right\} = e^{\mp t}u(t)$ et $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p \pm 1)^2}\right\} = te^{\mp t}u(t)$, on obtient aisément la transformée inverse

$$y(t) = Ae^t(t-1)u(t) + Be^{-t}(t+1)u(t)$$

où $A = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{K}{2}\right)$ et $B = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{K}{2}\right)$ sont toujours des constantes arbitraires. On impose les conditions en $t = 1$

$$y(1) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad y'(1) = 1 \Rightarrow A = -e^{-1}$$

$$y(t) = (t-1)e^{t-1}u(t)$$

2 On suit la même démarche. L'équation transformée est

$$ty'' + 2y' + 4ty = 1 \xrightarrow{\mathcal{L}} -(p^2Y(p) - y_0')' + 2pY(p) - 4Y'(p) = \frac{1}{p}$$

$$-(p^2 + 4)Y'(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow Y'(p) = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4} \right]$$

On prend la transformée inverse de cette équation

$$-ty(t) = -\frac{1}{4}[1 - \cos(2t)]u(t) \Rightarrow y(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{4t}u(t)$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La transformation de Laplace permet de résoudre des équations différentielles par la même démarche que celle que nous avons utilisée avec la transformation de Fourier.

3.4 Comme f est périodique de période 4 sa transformée de Laplace est de la forme :

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-4p}} \int_0^4 f(t)e^{-pt} dt.$$

On peut calculer cette intégrale sans difficulté mais on peut aussi remarquer que la fonction $g(t) = u(t) + u(t-1) - u(t-2) - u(t-3)$ est telle que

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \text{ pour } t \in [0, 4] \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(t)e^{-pt} dt &= \int_0^\infty g(t)e^{-pt} dt = \mathcal{L}(g) = \mathcal{L}\{u(t) + u(t-1) - u(t-2) - u(t-3)\} \\ &= \frac{1}{p}(1 + e^{-p} - e^{-2p} - e^{-3p}) \\ \Rightarrow F(p) &= \frac{1}{p} \frac{1 + e^{-p} - e^{-2p} - e^{-3p}}{1 - e^{-4p}} = \frac{1}{p} \frac{(1 + e^{-p})^2 (1 - e^{-p})}{(1 + e^{-p})(1 - e^{-p})(1 + e^{-2p})} \\ &= \frac{1}{p} \frac{1 + e^{-p}}{1 + e^{-2p}} \end{aligned}$$

La transformée de Laplace de l'équation est

$$(p^2 + \pi^2) Y(p) = \pi^2 F(p) \Rightarrow Y(p) = \frac{\pi^2}{p(p^2 + \pi^2)} \frac{1 + e^{-p}}{1 + e^{-2p}}$$

Pour prendre la transformation de Laplace inverse on va décomposer la fraction en éléments simples et développer le second terme en puissances de e^{-p} :

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{\pi^2}{p(p^2 + \pi^2)} \frac{1 + e^{-p}}{1 + e^{-2p}} = \left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \pi^2} \right] \frac{1 + e^{-p}}{1 + e^{-2p}} \\ &= \left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \pi^2} \right] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [e^{-2np} + e^{-(2n+1)p}] \end{aligned}$$

Les fonctions $\frac{1}{p}$ et $\frac{p}{p^2 + \pi^2}$ ont pour original respectivement $u(t)$ et $\cos(\pi t)u(t)$; la série en puissances de e^{-p} va engendrer dans le domaine temporel une série dans ces fonctions avec des arguments décalés dans le temps :

$$\begin{aligned} Y(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [u(t - 2n) + u(t - (2n + 1))] \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \cos[\pi(t - 2n)]u(t - 2n) + \cos[\pi(t - (2n + 1))]u(t - (2n + 1)) \} \end{aligned}$$

Explicitons la première série :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [u(t - 2n) + u(t - (2n + 1))] &= u(t) + u(t - 1) - u(t - 2) - u(t - 3) \\ &\quad + u(t - 4) + u(t - 5) - u(t - 6) - u(t - 7) + \dots \\ &= g(t) + g(t - 4) + \dots \end{aligned}$$

où $g(t)$ est la fonction définie à la question 1. Écrite sous cette forme la série apparaît comme la superposition périodique de période 4 du motif défini par la fonction g : il s'agit donc de la fonction f , second membre de l'équation. Par ailleurs, en utilisant $\cos[\pi(t - 2n)] = \cos(\pi t)$ et $\cos[\pi(t - (2n + 1))] = -\cos(\pi t)$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \{ \cos[\pi(t - 2n)]u(t - 2n) + \cos[\pi(t - (2n + 1))]u(t - (2n + 1)) \} \\ &= \cos(\pi t) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [u(t - 2n) - u(t - (2n + 1))] \end{aligned}$$

Finalement on a donc

$$y(t) = f(t) - \cos(\pi t) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [u(t - 2n) - u(t - (2n + 1))]$$

Le graphe révèle une fonction simple que l'on peut deviner en analysant l'expression ci-dessus. Il suffit de remarquer que la somme de fonctions de Heaviside est en fait une fonction de période 4 dont le motif voit se succéder un créneau de hauteur 1 et de largeur 1, un « blanc » de largeur 1, un créneau de hauteur -1 et de largeur 1 et enfin un « blanc » de largeur 1, et de composer ce signal avec $\cos(\pi t)$ et $f(t)$ (voir figure 3.3).

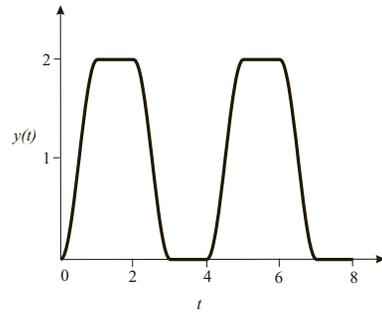


Figure 3.3

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

L'aller-retour entre la variable temporelle et la variable symbolique p est facilité par la forme géométrique simple des signaux impliqués qui peuvent s'exprimer comme des combinaisons de fonctions échelon. Là encore, comme dans l'exercice 3.2. **6**, l'analyse graphique de la solution révèle une fonction simple.

3.5 Si on multiplie l'équation par e^{-t} le terme intégral apparaît comme un produit de convolution :

$$tx'(t) + \int_0^t e^{-(t-t')}x(t')dt' = t \Rightarrow tx'(t) + e^{-t} * x(t) = t$$

On prend la transformée de Laplace de l'équation :

$$-(pX(p))' + \frac{1}{p+1}X(p) = \frac{1}{p^2} \Rightarrow -pX'(p) - \frac{p}{p+1}X(p) = \frac{1}{p^2}$$

Cette équation différentielle linéaire du premier ordre se résout de façon standard en utilisant la variation de la constante pour trouver la solution particulière de l'équation complète. On trouve

$$X(p) = \frac{K}{p+1} + \frac{p+1}{2p^2} \Rightarrow x(t) = \left[Ke^{-t} + \frac{1}{2}(1+t) \right] u(t)$$

On impose la condition initiale $x(0) = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

$$x(t) = \frac{1}{2} [e^{-t} + 1 + t] u(t)$$

3.6 1 Prenons la transformée de Laplace de l'équation du système à contre-réaction :

$$Y(p) = e^{-\tau p} [X(p) - kY(p)] \Rightarrow Y(p) = X(p) \frac{e^{-\tau p}}{1 + ke^{-\tau p}}$$

$$H(p) = \frac{e^{-\tau p}}{1 + ke^{-\tau p}}$$

2 On envoie en entrée un échelon unité $x(t) = u(t) \Rightarrow X(p) = \frac{1}{p}$ et

$$Y(p) = \frac{e^{-\tau p}}{p [1 + ke^{-\tau p}]} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-k)^n e^{-(n+1)\tau p}$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-k)^n u[t - (n+1)\tau] = u(t - \tau) - ku(t - 2\tau) + k^2u(t - 3\tau) + \dots$$

Les figures ci-dessous (figure 3.4) représentent la solution y pour $k = 0,5$ et pour $k = 1$.

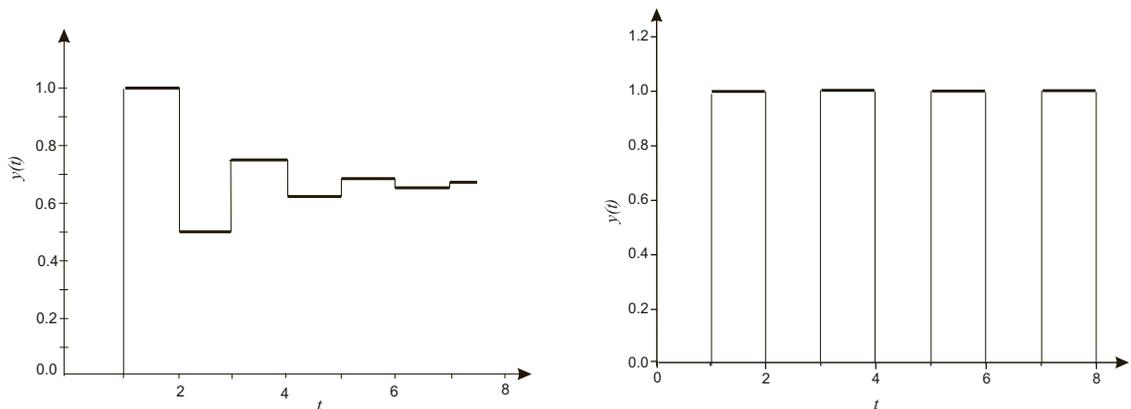


Figure 3.4

Figure de gauche : $k=0.5$; figure de droite : $k=1$.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Les exercices 3.5 et 3.6 mettent en jeu une équation intégrale et une équation aux différences. La transformation de Laplace est bien adaptée à la résolution de ces problèmes, ce qui montre l'étendue de son champ d'application.

Corrigés des problèmes

Problème 3.1

1 Oscillations libres ($a \neq 0, b \neq 0, h(t) \equiv 0$) :

$$y_1''(t) + \omega^2 y_1(t) + ky_2''(t) = 0$$

$$y_2''(t) + \omega^2 y_2(t) + ky_1''(t) = 0$$

On prend la transformation de Laplace de ces équations

$$p^2 Y_1(p) - ap + \omega^2 Y_1(p) + k(p^2 Y_2(p) - bp) = 0$$

$$p^2 Y_2(p) - bp + \omega^2 Y_2(p) + k(p^2 Y_1(p) - ap) = 0$$

$$(p^2 + \omega^2) Y_1(p) + kp^2 Y_2(p) = (a + kb) p$$

$$(p^2 + \omega^2) Y_2(p) + kp^2 Y_1(p) = (b + ka) p$$

On ajoute et retranche les équations

$$[Y_1(p) + Y_2(p)] [p^2(1+k) + \omega^2] = p(a+b)(1+k)$$

$$[Y_1(p) - Y_2(p)] [p^2(1-k) + \omega^2] = p(a+b)(1-k)$$

On en déduit, en posant $\omega_+ = \frac{\omega}{\sqrt{1+k}}$ et $\omega_- = \frac{\omega}{\sqrt{1-k}}$

$$Y_1(p) + Y_2(p) = (a+b) \frac{p}{p^2 + \omega_+^2} \Rightarrow y_1(t) + y_2(t) = (a+b) \cos(\omega_+ t) u(t)$$

$$Y_1(p) - Y_2(p) = (a-b) \frac{p}{p^2 + \omega_-^2} \Rightarrow y_1(t) - y_2(t) = (a-b) \cos(\omega_- t) u(t)$$

et par somme et différence des deux équations

$$y_1(t) = \frac{1}{2} \{ (a+b) \cos(\omega_+ t) + (a-b) \cos(\omega_- t) \} u(t)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2} \{ (a+b) \cos(\omega_+ t) - (a-b) \cos(\omega_- t) \} u(t)$$

2 Oscillations forcées ($a = 0, b = 0, h(t) \equiv \cos \omega_0 t$)

$$y_1''(t) + \omega^2 y_1(t) + ky_2''(t) = \cos \omega_0 t$$

$$y_2''(t) + \omega^2 y_2(t) + ky_1''(t) = 0$$

On prend la transformée de Laplace de ces équations

$$p^2 Y_1(p) + \omega^2 Y_1(p) + kp^2 Y_2(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$p^2 Y_2(p) + \omega^2 Y_2(p) + kp^2 Y_1(p) = 0$$

$$(p^2 + \omega^2) Y_1(p) + kp^2 Y_2(p) = \frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$(p^2 + \omega^2) Y_2(p) + kp^2 Y_1(p) = 0$$

Là encore on ajoute et retranche les équations

$$\begin{aligned} [Y_1(p) + Y_2(p)] &= \frac{1}{1+k} \frac{p}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \omega_+^2)} \\ &= \frac{1}{(1+k)(\omega_+^2 - \omega_0^2)} \left[\frac{p}{(p^2 + \omega_0^2)} - \frac{p}{(p^2 + \omega_+^2)} \right] \\ [Y_1(p) - Y_2(p)] &= \frac{1}{1-k} \frac{p}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \omega_-^2)} \\ &= \frac{1}{(1-k)(\omega_-^2 - \omega_0^2)} \left[\frac{p}{(p^2 + \omega_0^2)} - \frac{p}{(p^2 + \omega_-^2)} \right] \end{aligned}$$

on en déduit

$$y_1(t) = [(C_+ + C_-) \cos(\omega_0 t) - C_+ \cos(\omega_+ t) - C_- \cos(\omega_- t)] u(t)$$

$$y_2(t) = [(C_+ - C_-) \cos(\omega_0 t) - C_+ \cos(\omega_+ t) + C_- \cos(\omega_- t)] u(t)$$

avec

$$C_+ = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 - (1+k)\omega_0^2} \quad C_- = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 - (1-k)\omega_0^2}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

La transformation de Laplace donne une solution élégante de ce problème. Une autre méthode aurait consisté à découpler le système en faisant la somme et la différence des deux équations différentielles pour obtenir deux équations indépendantes du second ordre. Le prix à payer est une plus grande complexité des calculs dans l'implémentation du couplage des solutions et des conditions initiales.

Problème 3.2

I On a $x(t) = E \left(\frac{t}{\tau} \right) + 1$, (E = partie entière). Pour calculer la transformée de Laplace $X(p)$ on peut

Chapitre 3 • Transformation de Laplace

– soit utiliser le résultat de l'exercice 3.1. **8** et la propriété : $\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$

$$\mathcal{L}\{E(t)\} = \frac{1}{p(e^p - 1)} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{E\left(\frac{t}{\tau}\right) + 1\right\} = \frac{\tau}{\tau p(e^{p\tau} - 1)} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p(1 - e^{-p\tau})}$$

– soit on peut remarquer que

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t - n\tau) \Rightarrow X(p) = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np\tau} = \frac{1}{p(1 - e^{-p\tau})}$$

2 Déterminons la sortie y du filtre.

a) On prend la transformée de Laplace de l'équation

$$y'(t) + \omega^2 \int_0^t y(u) du = x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} pY(p) + \omega^2 \frac{Y(p)}{p} = \frac{1}{p(1 - e^{-p\tau})}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 + \omega^2)(1 - e^{-p\tau})} = \frac{1}{(p^2 + \omega^2)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn\tau}$$

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \sin[\omega(t - n\tau)] u(t - n\tau)$$

b) Si $\omega = \frac{\pi}{\tau}$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \sin[\omega(t - n\tau)] u(t - n\tau) \\ &= \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\omega t - n\pi) u(t - n\tau) \\ &= \frac{\tau}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u(t - n\tau) \end{aligned}$$

On a déjà rencontré cette fonction (avec $\tau = 1$) dans l'exercice 3.2. **6**.

Problème 3.3

En prenant la transformée de Laplace des équations et en utilisant les conditions initiales on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, p)}{\partial x} &= -(Lp + R) I(x, p) \\ \frac{\partial I(x, p)}{\partial x} &= -(Cp + G) V(x, p) \end{aligned}$$

On élimine l'une ou l'autre des fonctions inconnues par dérivation. On obtient les équations découplées

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V(x, p)}{\partial x^2} - \gamma^2(p)V(x, p) &= 0 \\ \frac{\partial^2 I(x, p)}{\partial x^2} - \gamma^2(p)I(x, p) &= 0\end{aligned}$$

où on a posé $\gamma(p) = \sqrt{(Lp + R)(Cp + G)}$. Les solutions sont de la forme

$$\begin{aligned}V(x, p) &= A(p) e^{-\gamma(p)x} + B(p) e^{\gamma(p)x} \\ I(x, p) &= A_I(p) e^{-\gamma(p)x} + B_I(p) e^{\gamma(p)x}\end{aligned}$$

Les solutions sont couplées à travers les équations initiales : on injecte dans l'une ou l'autre des équations du premier ordre

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x, p)}{\partial x} &= -(Lp + R) I(x, p) \\ \Rightarrow \gamma(p) [-A(p) e^{-\gamma(p)x} + B(p) e^{\gamma(p)x}] &= -(Lp + R) [A_I(p) e^{-\gamma(p)x} + B_I(p) e^{\gamma(p)x}]\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients des exponentielles on obtient :

$$\begin{aligned}A_I(p) &= \frac{\gamma(p)}{(Lp + R)} A(p) = \frac{1}{Z_c(p)} A(p) \\ B_I(p) &= -\frac{\gamma(p)}{(Lp + R)} B(p) = -\frac{1}{Z_c(p)} B(p)\end{aligned}$$

où on a posé $Z_c(p) = \sqrt{\frac{Lp + R}{Cp + G}}$; d'où le résultat

$$\begin{aligned}V(x, p) &= A(p) e^{-\gamma(p)x} + B(p) e^{\gamma(p)x} \\ I(x, p) &= \frac{1}{Z_c(p)} [A(p) e^{-\gamma(p)x} - B(p) e^{\gamma(p)x}]\end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

La transformation de Laplace permet de remplacer ce système d'équations aux dérivées partielles couplées par un système d'équations différentielles ordinaires et donc de le résoudre facilement.

Problème 3.4

Pour une ligne sans perte $R = G = 0$ on a $Z_c(p) = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_c$ et $\gamma(p) = p/c$. La condition en bout de ligne $v(l, t) = R_u i(l, t)$ se traduit par $V(l, p) = R_u I(l, p)$.

Chapitre 3 • Transformation de Laplace

1 Les conditions en $x = 0$ et en $x = l$ deviennent, avec la solution générale ci-dessus

$$\begin{aligned} A(p) + B(p) &= E(p) \\ A(p) e^{-pl/c} + B(p) e^{pl/c} &= \frac{R_u}{R_c} \left[A(p) e^{-pl/c} - B(p) e^{pl/c} \right] \end{aligned}$$

En résolvant ce système de deux équations à deux inconnues on obtient

$$A(p) = E(p) \frac{1}{1 + K e^{-2pl/c}} \quad B(p) = E(p) \frac{K e^{-2pl/c}}{1 + K e^{-2pl/c}}$$

où $K = \frac{R_u - R_c}{R_u + R_c}$.

2 On en déduit

$$\begin{aligned} V(x, p) &= \frac{E(p)}{1 + K e^{-2pl/c}} \left[e^{-px/c} + K e^{p(x-2l)/c} \right] \\ &= E(p) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[K^n e^{-(x+2nl)p/c} + K^{n+1} e^{(x-2(n+1)l)p/c} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K^n & \left\{ e \left[t - x/c - 2nl/c \right] u \left[t - x/c - 2nl/c \right] \right. \\ & \left. + K e \left[t + x/c - 2(n+1)l/c \right] u \left[t + x/c - 2(n+1)l/c \right] \right\} \end{aligned}$$

Le premier terme en $t - x/c$ correspond aux ondes qui se propagent le long des x positifs et les différentes valeurs de n correspondent à la composante progressive des différents aller-retour qui se développent quand le temps croît. Les termes en $t + x/c$ correspondent aux ondes qui se propagent le long des x négatifs après réflexion sur l'extrémité de la ligne.

3 Pour une tension d'entrée égale à un échelon l'expression de la tension en bout de ligne ($x = l$) devient (on pose $l/c = \tau$) :

$$v(l, t) = (K + 1) V_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K^n u \left[t - (2n + 1) \tau \right]$$

Examinons les cas limites :

$$\begin{aligned} R_c \gg R_u \quad K \simeq -1 \quad v(l, t) &= 0 \\ R_c \ll R_u \quad K \simeq 1 \quad v(x, t) &= 2V_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u \left(t - (2n + 1) \tau \right) \\ R_c \simeq R_u \quad K \simeq 0 \quad v(x, t) &= V_0 u \left(t - \tau \right) \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Encore une fois à l'instar des exercices 3.2, **6**, 3.4, 3.6, la solution dans le domaine temporel s'obtient par un développement de la fonction symbolique en puissances de e^{-ap} et conduit à une représentation de la solution sous la forme d'une série d'échelons décalés.

Problème 3.5

La condition en bout de ligne est maintenant

$$v(l, t) = L_0 \frac{\partial}{\partial t} i(l, t)$$

On veut déterminer le potentiel en bout de ligne, $v(x = l, t)$, quand on applique à l'entrée un échelon de tension : $e(t) = V_0 u(t)$.

1 La solution générale de la ligne sans perte est

$$\begin{aligned} V(x, p) &= A(p) e^{-px/c} + B(p) e^{px/c} \\ I(x, p) &= \frac{1}{R_c} \left[A(p) e^{-px/c} - B(p) e^{px/c} \right] \end{aligned}$$

La condition en $x = l$ s'écrit ($\tau = l/c$) : $V(l, p) = L_0 p I(l, p)$ car $i(l, t = 0) = 0$

$$\begin{aligned} A(p) e^{-p\tau} + B(p) e^{p\tau} &= \frac{pL_0}{R_c} \left[A(p) e^{-p\tau} - B(p) e^{p\tau} \right] \\ A(p) e^{-p\tau} \left[1 - \frac{pL_0}{R_c} \right] + B(p) e^{p\tau} \left[1 + \frac{pL_0}{R_c} \right] &= 0 \end{aligned}$$

On a $\frac{R_c}{L_0} = c \frac{L}{L_0} = \alpha$. La dernière équation s'écrit donc

$$A(p) e^{-p\tau} \left[1 - \frac{p}{\alpha} \right] + B(p) e^{p\tau} \left[1 + \frac{p}{\alpha} \right] = 0$$

Par ailleurs $v(x = 0, t) = V_0 u(t)$

$$V(0, p) = \frac{V_0}{p} = A(p) + B(p)$$

En résolvant ce système de deux équations à deux inconnues pour $A(p)$ et $B(p)$ on obtient

$$A(p) = \frac{V_0}{2p} \frac{(p + \alpha)e^{\tau p}}{p \cosh(\tau p) + \alpha \sinh(\tau p)} \quad B(p) = \frac{V_0}{2p} \frac{(p - \alpha)e^{-\tau p}}{p \cosh(\tau p) + \alpha \sinh(\tau p)}$$

On en déduit

$$V(x = l, p) = A(p) e^{-p\tau} + B(p) e^{p\tau} = \frac{V_0}{p \cosh(\tau p) + \alpha \sinh(\tau p)}$$

2 On va maintenant chercher la transformée de Laplace inverse de cette expression.

a) Pour cela on écrit

$$\begin{aligned}
 p \cosh(\tau p) + \alpha \sinh(\tau p) &= \frac{1}{2} [(p + \alpha)e^{\tau p} + (p - \alpha)e^{-\tau p}] \\
 &= \frac{1}{2}(p + \alpha)e^{\tau p} \left[1 + \frac{p - \alpha}{p + \alpha} e^{-2\tau p} \right] \\
 \Rightarrow V(x = l, p) &= \frac{V_0}{p \cosh(\tau p) + \alpha \sinh(\tau p)} \\
 &= \frac{2V_0}{(p + \alpha)e^{\tau p}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^n e^{-2n\tau p} \\
 &= 2V_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(p - \alpha)^n}{(p + \alpha)^{n+1}} e^{-(2n+1)\tau p}
 \end{aligned}$$

b) On écrit

$$\frac{(p - \alpha)^n}{(p + \alpha)^{n+1}} = p^n \frac{1}{(p + 2\alpha)^{n+1}} \Big|_{p-\alpha}$$

Prenons la transformée inverse :

- le décalage de la variable symbolique $p - \alpha$ devient multiplication par $e^{\alpha t}$;
- la multiplication par p^n devient la dérivée $n^{\text{ème}}$ de

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p + 2\alpha)^{n+1}} \right\} = e^{-2\alpha t} \frac{t^n}{n!} u(t);$$

remarquons que $f(0^+) = f'(0^+) = \dots = f^{(n-1)}(0^+) = 0$.

Finalement

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(p - \alpha)^n}{(p + \alpha)^{n+1}} \right\} = e^{\alpha t} \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{n!} e^{-2\alpha t} t^n \right] u(t)$$

En utilisant la formule de Leibniz (voir page chapitre 1) cette expression devient

$$\begin{aligned}
 e^{\alpha t} \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{n!} e^{-2\alpha t} t^n \right] u(t) &= u(t) e^{\alpha t} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (t^n)^{[k]} (e^{-2\alpha t})^{[n-k]} \\
 &= u(t) e^{\alpha t} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k n(n-1)\dots(n-k+1) t^{n-k} (-2\alpha)^{n-k} e^{-2\alpha t} \\
 &= u(t) e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{(n-k)!} (-2\alpha t)^{n-k} \\
 &= u(t) e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{k!} (-2\alpha t)^k = e^{-\alpha t} L_n(2\alpha t) u(t)
 \end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière ligne l'identité $C_n^{-k} = C_n^k$ et où $L_n(x)$ est le polynôme en x de degré n dont la forme explicite est

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$

c) On déduit des résultats précédents que

$$v(x = l, t) = 2V_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\alpha(t-(2n+1)\tau)} L_n[2\alpha(t - (2n+1)\tau)] u(t - (2n+1)\tau)$$

qu'on peut réécrire

$$\begin{aligned} v(x = l, t) &= 0 \quad \text{pour } 0 < t < \tau \\ &= 2V_0 \sum_{k=0}^{N(t)} (-1)^k e^{-\alpha[t-(2k+1)\tau]} L_k[2\alpha(t - (2k+1)\tau)] \quad \text{pour } t \geq \tau \end{aligned}$$

où $N(t)$ est l'entier dans \mathbb{N} qui satisfait

$$2N(t) + 1 \leq \frac{t}{\tau} < 2N(t) + 3 \Leftrightarrow N(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} - 1 \right) < N(t) + 1$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Cette méthode permet d'obtenir une représentation exacte de la solution de ce problème compliqué.

Problème 3.6

1 La condition que v et i doivent donc tendre vers zéro quand $x \rightarrow +\infty$ entraîne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x, p) = \lim_{x \rightarrow \infty} I(x, p) = 0$$

et implique que la solution générale se réduit à

$$\begin{aligned} V(x, p) &= E(p) e^{-\gamma(p)x} \\ I(x, p) &= \frac{1}{Z_c(p)} E(p) e^{-\gamma(p)x} \end{aligned}$$

2 Inductance linéique négligeable : $L = 0$.

a) On a montré dans l'exercice 3.1. **7** que $\mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-a^2/t}}{\sqrt{t}} u(t) \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2a\sqrt{p}}$; on en déduit :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-a^2/t}}{t\sqrt{t}} u(t) \right\} = \int_p^\infty \sqrt{\frac{\pi}{p'}} e^{-2a\sqrt{p'}} dp' \underset{u=2\sqrt{p'}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-2a\sqrt{p}}$$

Chapitre 3 • Transformation de Laplace

b) Soit $f_{\pm}(t) = \text{Erf}\left(a\sqrt{t} \mp \frac{b}{\sqrt{t}}\right) u(t)$;

$$f'_{\pm}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \pm \frac{b}{t\sqrt{t}} \right) \exp\left(-a^2t - \frac{b^2}{t} \pm 2ab\right);$$

ou encore

$$f'_{\pm}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2t} e^{\pm 2ab} \left(a \frac{e^{-b^2/t}}{\sqrt{t}} \pm b \frac{e^{-b^2/t}}{t\sqrt{t}} \right)$$

On prend la transformée de Laplace en utilisant les résultats du (a)

$$\mathcal{L}\{f'_{\pm}(t)\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\pm 2ab} \left[a \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2b\sqrt{p}} \pm \sqrt{\pi} e^{-2b\sqrt{p}} \right]_{p+a^2}$$

où le décalage $p + a^2$ est engendré par l'exponentielle e^{-a^2t} . Par ailleurs on a

$$\mathcal{L}\{f'_{\pm}(t)\} = pF_{\pm}(p) - f_{\pm}(0^+)$$

avec

$$f_{\pm}(0^+) = \text{Erf}(\mp\infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mp\infty} e^{-x^2} dx = \mp \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \mp 1$$

d'où

$$pF_{\pm}(p) \pm 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\pm 2ab} \left[a \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2b\sqrt{p}} \pm \sqrt{\pi} e^{-2b\sqrt{p}} \right]_{p+a^2}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{e^{-2ab} \text{Erf}\left(a\sqrt{t} - \frac{b}{\sqrt{t}}\right) u(t)\right\} &= \frac{1}{p} \left\{ e^{-2b\sqrt{p+a^2}} \left[\frac{a}{\sqrt{p+a^2}} + 1 \right] - e^{-2ab} \right\} \\ \mathcal{L}\left\{e^{2ab} \text{Erf}\left(a\sqrt{t} + \frac{b}{\sqrt{t}}\right) u(t)\right\} &= \frac{1}{p} \left\{ e^{-2b\sqrt{p+a^2}} \left[\frac{a}{\sqrt{p+a^2}} - 1 \right] + e^{2ab} \right\} \end{aligned}$$

En combinant les résultats ci-dessus on obtient

$$\mathcal{L}\left\{e^{-2ab} [1 + \text{Erf}(a\sqrt{t} - b/\sqrt{t})] - e^{2ab} [1 - \text{Erf}(a\sqrt{t} + b/\sqrt{t})]\right\} u(t) = \frac{2}{p} e^{-2b\sqrt{p+a^2}}$$

c) On a $\gamma(p) = \sqrt{R(Cp + G)} = \beta\sqrt{p+a^2}$ avec $a = \sqrt{\frac{G}{C}}$ et $\beta = \sqrt{RC}$; par ailleurs

$$E(p) = \frac{V_0}{p}.$$

Pour la tension on a donc

$$V(x, p) = \frac{V_0}{p} e^{-x\beta\sqrt{p+a^2}}$$

Compte tenu des résultats de la question précédente, en posant $b = \frac{1}{2}x\beta = \frac{x}{2}\sqrt{RC}$ on en déduit

$$v(x, t) = \frac{V_0}{2}e^{-x\sqrt{RG}} \left\{ 1 + \operatorname{Erf} \left(\sqrt{\frac{G}{C}}t - \frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}} \right) \right\} u(t) \\ + \frac{V_0}{2}e^{x\sqrt{RG}} \left\{ 1 - \operatorname{Erf} \left(\sqrt{\frac{G}{C}}t + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}} \right) \right\} u(t)$$

3 Effet de peau

Le facteur de propagation prend la forme suivante :

$$\gamma(p) = \frac{R}{2R_c} + \frac{k}{R_c\sqrt{2}}\sqrt{p} + \frac{p}{c}$$

Les pertes ohmiques impliquent $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x, t) = 0 \Rightarrow V(x, p) = E(p) e^{-\gamma(p)x}$. On applique un échelon à l'entrée de la ligne $e(t) = V_0 u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{V_0}{p}$.

On a donc

$$V(x, p) = \frac{V_0}{p} \exp \left[-\frac{R}{2R_c}x - \frac{k}{R_c\sqrt{2}}x\sqrt{p} - \frac{px}{c} \right] \\ = V_0 \exp \left(-\frac{R}{2R_c}x \right) \frac{\exp \left[-\frac{k}{R_c\sqrt{2}}x\sqrt{p} \right]}{p} \exp \left(-\frac{px}{c} \right)$$

On va chercher l'original de $\frac{1}{p}e^{-2a\sqrt{p}}$; le facteur $e^{-\frac{px}{c}}$ se traduira sur le résultat par une translation temporelle de $-\frac{x}{c}$. On utilise (**1 a**)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-2a\sqrt{p}} \right\} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-a^2/t}}{t\sqrt{t}} u(t)$$

On déduit de ce résultat

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} e^{-2a\sqrt{p}} \right\} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-a^2/t'}}{t'\sqrt{t'}} dt' \stackrel{u=\frac{a}{\sqrt{t'}}}{=} \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{2}{a} \right) \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\frac{a}{\sqrt{t}}} e^{-u^2} du \\ = \operatorname{Erfc} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right) u(t) \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} e^{-2a\sqrt{p}} e^{-bp} \right\} = \operatorname{Erfc} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right) u(t) \Big|_{t-b} = \operatorname{Erfc} \left(\frac{a}{\sqrt{t-b}} \right) u(t-b)$$

Chapitre 3 · Transformation de Laplace

En identifiant $2a = \frac{k}{R_c\sqrt{2}}x$ et $b = \frac{x}{c}$ on obtient

$$v(x, t) = V_0 \exp\left(-\frac{R}{2R_c}x\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{2}R_c} \frac{x}{\sqrt{t - \frac{x}{c}}}\right) u\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Là encore la méthode de résolution basée sur la transformation de Laplace conduit pour ces deux problèmes à des solutions exactes qui s'expriment en termes de la fonction d'Erreur.

INTÉGRALES COMPLEXES ; THÉORÈME DES RÉSIDUS

RAPPELS DE COURS

- *Conditions de Cauchy*

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie de la façon suivante : $z = x + iy \rightarrow f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Cette fonction est dite *analytique* ou *holomorphe* dans un domaine si, dans ce domaine, P et Q satisfont les conditions suivantes (conditions de Cauchy) :

- P et Q sont continuellement différentiables ;
- $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$.

- *Fonction logarithme complexe*

$z = \rho e^{i\theta} \rightarrow \log z = \ln \rho + i\theta, \quad \theta \in]\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$; la *détermination principale* notée $\text{Log } z$, correspond au choix $\theta_0 = -\pi$ c'est-à-dire à un choix de coupure le long de l'axe réel négatif.

- *Théorème de Cauchy*

Soit Δ un domaine ouvert simplement connexe de \mathbb{C} , et f une fonction analytique dans Δ .

Alors pour tout lacet γ dans Δ , on a $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

- *Formule de Cauchy*

Soit Δ un domaine ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et f une fonction analytique dans Δ . Soit γ un lacet dans Δ et z_0 un point dans Δ entouré par γ ; alors :

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2i\pi}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

- *Série de Laurent*

Soit f analytique dans une couronne centrée en z_0 : $R_1 < |z - z_0| < R_2$ et γ un lacet dans la couronne entourant le point z_0 ; alors

$$\forall z \text{ dans la couronne } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$\text{avec } c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

Chapitre 4 • Intégrales complexes ; théorème des résidus

• Singularités

Le développement de Laurent de f au voisinage de z_0 est celui défini dans la couronne $0 < |z - z_0| < R$ où R est la distance entre z_0 et la singularité de f la plus proche de z_0 . La série en $\frac{1}{z - z_0}$ est la *partie singulière* du développement. Si elle compte un nombre *fini* de termes, z_0 est un *pôle* dont l'*ordre* est le degré de ce polynôme en $\frac{1}{z - z_0}$; s'il y a un nombre *infini* de termes, z_0 est un *point singulier essentiel*.

• Définition du résidu de f en z_0

C'est le coefficient du terme en $\frac{1}{z - z_0}$ du développement de Laurent de f au voisinage de z_0 .

• Théorème des résidus

Soit f une fonction méromorphe¹ dans un domaine ouvert Δ et γ un lacet dans Δ qui entoure les pôles $z_1 z_2 \dots z_n$. Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

• Calcul du résidu dans le cas d'un pôle simple

Si $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ et qu'il existe un point z_0 tel que $Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$ et $P(z_0) \neq 0$ alors z_0 est un pôle simple de la fonction $f(z)$ et le résidu en z_0 est donné par : $\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

• Calcul du résidu dans les autres cas (pôles multiples)

Il convient d'utiliser la définition du résidu ou bien la formule intégrale de Cauchy si le pôle est explicite.

• Lemmes de Jordan

Soit γ un arc de cercle de centre z_0 , de rayon r , d'angle α :

$$\gamma : \theta \in [\theta_0, \theta_0 + \alpha] \rightarrow z_0 + r e^{i\theta}$$

contenu dans un domaine d'analyticité de f .

1. si $\lim_{r \rightarrow 0} |r f(z_0 + r e^{i\theta})| = 0 \quad \forall \theta \in [\theta_0, \theta_0 + \alpha] \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = 0$

2. si $\lim_{r \rightarrow \infty} |r f(z_0 + r e^{i\theta})| = 0 \quad \forall \theta \in [\theta_0, \theta_0 + \alpha] \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = 0$

3. si z_0 est un pôle simple de f , alors $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = i\alpha \text{Res}(f, z_0)$.

1. Une fonction f est dite *méromorphe* dans un domaine ouvert Δ si elle est analytique dans ce domaine sauf en des points singuliers isolés (pôles, points singuliers essentiels) du domaine.

Pour réaliser les majorations utiles à la mise en œuvre de ces lemmes on utilisera abondamment l'inégalité triangulaire :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

et son extension continue

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| dz$$

ÉNONCÉS DES PROBLÈMES

Problème 4.1 Calcul d'intégrales

1 Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes en intégrant la fonction appropriée sur le contour 1 de la figure 4.1 :

a) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$

b) $I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - 2x^2 \cos 2\alpha + 1} dx$ où $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

c) $I_n = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{2n+1} + 1} dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$

2 Calculer l'intégrale $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx$

a) par une intégration directe ;

b) en intégrant la fonction $f(z) = \frac{1}{z^3 + 1}$ sur le contour 2 de la figure 4.1 ;

c) en intégrant la fonction $f(z) = \frac{\log z}{z^3 + 1}$ sur le contour 3 de la figure 4.1.

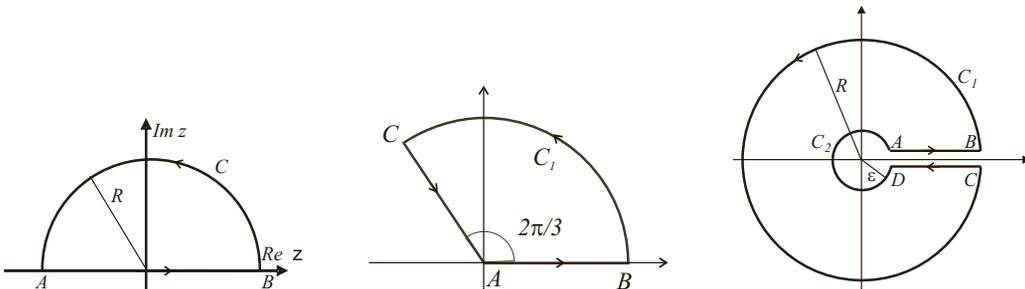


Figure 4.1
Contours 1, 2 et 3, de gauche à droite.

Problème 4.2 Intégrales de fonctions trigonométriques — Séries de Fourier

1 Calculer l'intégrale

$$I(a) = \int_0^\pi \frac{1}{(a + \cos \theta)^2} d\theta \quad |a| > 1$$

2 Développer en séries de Fourier les fonctions 2π périodiques :

a) $f(\theta) = \frac{1}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad |a| \neq 1$

b) $g(t) = \frac{\cos t}{\sin t - a} \quad a > 1$

Problème 4.3 Intégrales de Fresnel

1 On désigne par γ le lacet du contour 4 de la figure 4.2. En évaluant l'intégrale $I_\gamma = \int_\gamma e^{-z^2} dz$ déterminer la valeur des intégrales de Fresnel :

$$I_S = \int_0^\infty \sin(x^2) dx \quad \text{et} \quad I_C = \int_0^\infty \cos(x^2) dx$$

2 On veut calculer les intégrales :

$$J_S(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt \quad \text{et} \quad J_C(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\cos t}{t^\alpha} dt \quad \alpha \in]0, 1[$$

a) Pour cela calculer l'intégrale de la fonction complexe $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^\alpha}$ sur le contour 5 de la figure 4.2 (on choisit la détermination de z^α qui est définie dans le plan L_0 coupé le long de l'axe réel négatif et qui est réelle positive pour z réel positif).

b) Retrouver la valeur des intégrales de Fresnel.

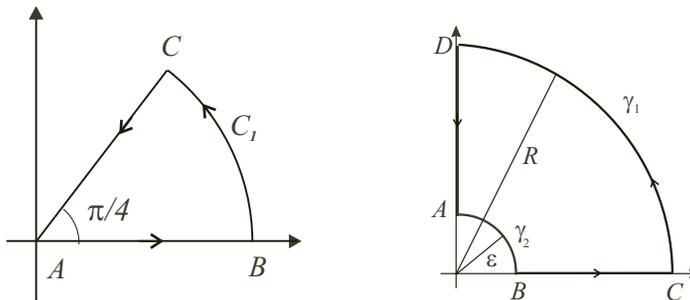


Figure 4.2 Contours 4 et 5.

Problème 4.4 Calcul d'intégrales

- 1 Calculer l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} \frac{x}{a + \cos x} dx$ ($a > 1$) de deux manières différentes :
- a) en intégrant la fonction $f(z) = \frac{\log z}{z^2 + 2az + 1}$ sur le contour 3 de la figure 4.1 avec $R = 1$;
- b) en intégrant la fonction $f(z) = \frac{z}{a + \cos z}$ sur le contour 6 de la figure 4.3.

- 2 On veut calculer l'intégrale $I(x) = \int_0^\infty \frac{t^x - 1}{t^2 - 1} dt$ avec $x \in]-1, 1[$.

a) Montrer que

$$I(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(ux)}{\sinh(u)} du$$

- b) Calculer $I(x)$ en intégrant la fonction $f(z) = \frac{\sinh(zx)}{\sinh(z)}$ sur le contour 7 de la figure 4.3.

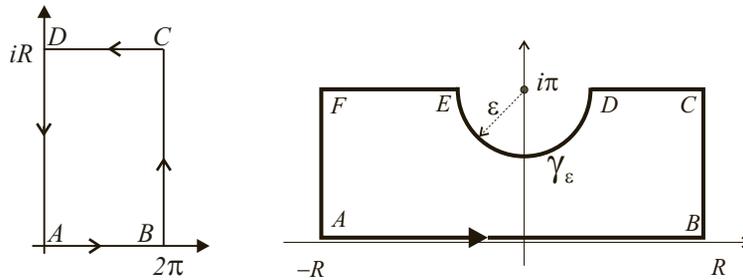


Figure 4.3 Contours 6 et 7.

Problème 4.5 Formule des compléments

La fonction B est définie par (voir chapitre 1)

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(t+1)^{x+y}} dt \quad (x, y) \in (\mathbb{R}^{**})^2$$

On a donc pour $x = \alpha \in]0, 1[$ et $y = 1 - \alpha$

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt \quad \alpha \in]0, 1[$$

En intégrant la fonction $f_\alpha(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{z+1}$ avec $\alpha \in]0, 1[$ sur le contour 3 de la figure 4.1 montrer que :

$$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

Puisque $B(\alpha, 1 - \alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha)$ ce résultat permet d'établir la formule des compléments :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Problème 4.6 Formule de duplication de la fonction Γ

Soit la fonction $f : t \rightarrow f(t) = t^\alpha u(t)$, où $\alpha > -1$. On désigne par $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ la transformée de Laplace de f .

- 1 Calculer $F(p)$ pour p réel positif.
- 2 En déduire $F(p)$ pour p complexe, $\text{Re } p > 0$.
- 3 Déduire des questions précédentes l'expression de la transformée de Fourier de $g(t) = e^{-t} t^\alpha u(t)$.
- 4 On prend $\alpha > 0$. À l'aide de la formule de Parseval, établir la formule de duplication

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\Gamma(2\alpha)$$

Problème 4.7 Transformation de Fourier ; transformation de Laplace inverse

- 1 En intégrant $f(z) = e^{-z^2}$ sur le contour 8 de la figure 4.4 déterminer la transformée de Fourier de la fonction gaussienne $f(t) = e^{-t^2}$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.
- 2 Calculer la transformée de Fourier de $f(t) = \frac{1}{t^4 + 1}$.
- 3 Calculer la transformée de Laplace inverse de $F(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 2}$ à l'aide de l'intégrale de Bromwich-Wagner

$$f(t) = \int_{\Delta} F(p) e^{pt} dp$$

où Δ est la droite $\text{Re } p = \sigma$. Pour cela on calculera l'intégrale de $F(p)$ sur le contour 9 de la figure 4.4 avec $\sigma = 0$ (justifier).

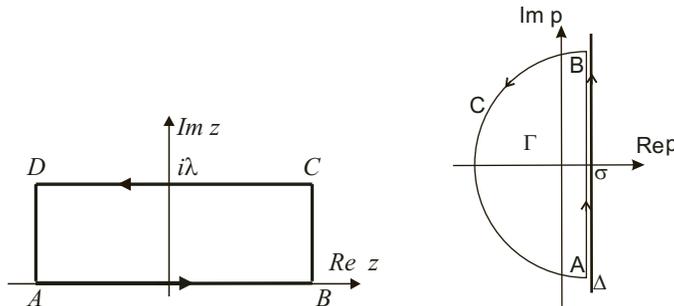


Figure 4.4 Contours 8 et 9.

- 4 Calculer la transformée de Fourier de $\frac{1}{\cosh t}$ en intégrant la fonction $f(z) = \frac{e^{-2i\pi\nu z}}{\cosh z}$ sur le contour 8 de la figure 4.4 (avec $\lambda = \pi$).

Problème 4.8 Transformation en Z inverse

Un signal discret *causal* est une suite numérique à valeurs complexes $\{x_n\}$, définie sur \mathbb{N} . Sa transformée en Z est la fonction définie sur \mathbb{C} par :

$$\mathcal{Z}(x_n) = A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$$

- 1 Montrer que si la suite $\{x_n\}$ est telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = R_0$$

avec $0 < R_0 < \infty$ alors la fonction $A(z)$ est analytique dans le *codisque* $|z| > R_0$.

- 2 Nous cherchons à résoudre le problème inverse : étant donnée une fonction $A(z)$, analytique dans un codisque $|z| > R_0$; trouver le signal discret $\{x_n\}$ dont $A(z)$ est la transformée en Z. Établir que

$$x_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} A(z) z^{n-1} dz$$

où Γ est un cercle centré à l'origine et de rayon $R > R_0$.

- 3 On considère la fonction $A(z) = \frac{z}{1 - 2z \cosh a + z^2}$ (avec $a > 0$) et on cherche le signal discret *causal* $\{x_n\}$ dont elle est la transformée en Z.
- Déterminer R_0 .
 - Calculer l'expression de x_n à l'aide de l'équation de la question 2.
 - Retrouver ce résultat par un développement direct de $A(z)$.

Problème 4.9 Série de Fourier d'une fonction non bornée

Soit f la fonction π -périodique définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ par

$$f(t) = \ln(|\sin t|)$$

On veut construire sa série de Fourier.

- Montrer que le coefficient $a_0 = -\ln 2$.
- Montrer que pour $n \geq 1$ le coefficient a_n est de la forme

$$a_n = -\frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \cos \theta d\theta$$

- Calculer a_n en effectuant le changement de variable $z = e^{i\theta}$ dans l'intégrale ; en déduire l'expression de la série de Fourier de f .

DU MAL À DÉMARRER ?

Dans la plupart de ces problèmes (4.1 et 4.3 à 4.7) la méthode pour calculer l'intégrale réelle recherchée consiste à évaluer l'intégrale d'une fonction complexe bien choisie le long d'un contour approprié, selon deux étapes :

(a) calcul de la valeur de l'intégrale par le théorème adéquat (Cauchy, résidu) ;

(b) décomposition de l'intégrale le long du contour et - le plus souvent - déformation du contour de façon à faire apparaître l'intégrale (réelle en général) recherchée.

Problème 4.1

Pour calculer $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ on calcule l'intégrale de $f(z)$ sur le contour 1 de la figure 4.1 à l'aide du théorème des résidus en prenant soin de ne prendre en compte que les pôles entourés par ce contour. Dans 2 (c) il faut faire un choix de détermination de la fonction logarithme complexe.

Problème 4.2

On ramène à 2π la longueur de l'intervalle d'intégration et on pose $z = e^{i\theta}$ puis on intègre par le théorème des résidus l'intégrale obtenue qui est celle d'une fraction rationnelle sur le cercle unité.

2 (b) On calculera les coefficients c_n de la série de Fourier complexe. On pourra poser $a = \cosh b$.

Problème 4.3

Dans les deux questions il faut utiliser une majoration fine de l'intégrale sur le grand cercle pour montrer qu'elle tend vers zéro quand R tend vers l'infini :

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}, \quad \cos \theta \geq 1 - \frac{2\theta}{\pi}.$$

2 (a) Penser à la fonction Gamma !

Problème 4.4

1 Il est utile de poser : $a = \cosh b$ avec $b > 0$. (a) Attention, le cercle C_1 a ici un rayon $R = 1$.

2 (a) Faire alternativement le changement de variable $t = e^u$ et $t = e^{-u}$. (b) La valeur de l'intégrale vient à travers celle sur γ_ϵ qui sera évaluée à l'aide du 3^e lemme de Jordan.

Problème 4.5

Suivre l'évolution de la détermination de z^α le long du contour. Pour l'application des lemmes de Jordan il est suggéré de majorer $|zf(z)|$ sur un cercle de rayon r ($0 < r < \infty$) puis d'étudier cette majorante tour à tour pour $r = R \rightarrow \infty$ et pour $r = \epsilon \rightarrow 0$.

Problème 4.6

Dans 2, le changement de variable $u = pt$ dans l'intégrale de Laplace conduit à une intégrale complexe le long d'un axe Δ ; pour la calculer il faut considérer un contour fermé qui comprend l'axe réel, l'axe Δ et qui est fermé par un arc de cercle.

Problème 4.7

2 et 3 Être attentif au choix du contour qui est lié au signe de la variable externe ($\nu > 0$ ou

$\nu < 0$ dans **2**, $t > 0$ ou $t < 0$ dans **3**) pour assurer la convergence de l'intégrale sur le grand cercle.

Problème 4.8

2 Développer $A(z)$ en série de Laurent dans le codisque.

Problème 4.9

1 On utilisera des changements de variable successifs ;

3 Pour calculer le résidu, isoler explicitement le terme en $1/z$ dans l'expression de la fonction à intégrer.

Corrigés des problèmes

Problème 4.1

1 *Intégrales de fractions rationnelles*

a) *Intégrale I* : les pôles de $f(z) = \frac{z^4 + 1}{z^6 + 1}$ sont les solutions dans \mathbb{C} de $z^6 = -1$ soit $z_k = e^{(2k+1)i\pi/6}$, $k = 0, \dots, 5$. Seuls les pôles $z_0 = e^{i\pi/6}$, $z_1 = e^{i\pi/2}$, et $z_2 = e^{5i\pi/6}$ sont entourés par le lacet. On calcule la valeur de I_Γ :

$$I_\Gamma = 2i\pi \sum_{k=0}^2 \text{Res}(f, z_k) \quad \text{Res}(f, z_k) = \frac{z_k^4 + 1}{6z_k^5} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{z_k} - z_k \right) \quad \text{puisque } \frac{1}{z_k^5} = -z_k$$

$$I_\Gamma = \frac{2i\pi}{6} \left(-2i \sin \frac{\pi}{6} - 2i \sin \frac{\pi}{2} - 2i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{4\pi}{3}$$

$$|Rf(Re^{i\theta})| \leq R \left| \frac{(1 + R^4 e^{i4\theta})}{1 + R^6 e^{6i\theta}} \right| \leq R \frac{R^4 + 1}{R^6 - 1} \rightarrow 0$$

d'où $\lim_{R \rightarrow \infty} |I_C| = 0$ (2^e lemme de Jordan). Finalement

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_\Gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx = I = \frac{4\pi}{3}$$

b) *Intégrale I(α)* : Pôles de la fonction $f(z) = \frac{z^2}{z^4 - 2z^2 \cos(2\alpha) + 1} \rightarrow z^4 - 2z^2 \cos(2\alpha) + 1 = 0$

a pour solutions $z = \pm e^{\pm i\alpha}$. Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ les quatre pôles sont distincts ; si $\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow z = \pm i$ et on a deux pôles doubles.

Supposons d'abord $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$: seuls les pôles $z = e^{i\alpha}$ et $z = -e^{-i\alpha}$ sont entourés par le lacet

d'intégration. Donc

$$\begin{aligned} I_{\Gamma} &= 2i\pi [\operatorname{Res}(f, e^{i\alpha}) + \operatorname{Res}(f, -e^{-i\alpha})] = 2i\pi \left[\frac{e^{i\alpha}}{4i \sin(2\alpha)} + \frac{e^{-i\alpha}}{4i \sin(2\alpha)} \right] \\ &= \pi \frac{\cos \alpha}{\sin(2\alpha)} = \frac{\pi}{2 \sin(\alpha)} \end{aligned}$$

Sur le grand cercle

$$|Rf(Re^{i\theta})| = R \left| \frac{R^2 e^{2i\theta}}{(Re^{i\theta} - z_1)(Re^{i\theta} - z_2)(Re^{i\theta} - z_3)(Re^{i\theta} - z_4)} \right| \leq \frac{R^3}{(R-1)^4} \rightarrow 0$$

Donc $\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_C f(z) dz \right| = 0$ d'après le 2^e lemme de Jordan. On en déduit que pour $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$,

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2 \sin(\alpha)}$$

Supposons maintenant $\alpha = \frac{\pi}{2}$; le pôle (double) $z = i$ est entouré par le lacet d'intégration. Donc

$$I_{\Gamma} = 2i\pi \operatorname{Res}(f, i) = 2i\pi \left. \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+i)^2} \right|_{z=i} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I(\alpha = \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

qui est bien la valeur de $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} I(\alpha)$.

c) *Intégrale I_n* : Les singularités de $f(z) = \frac{1}{z^{2n} + 1}$ sont les solutions dans \mathbb{C} de $z^{2n} = -1$ soit $z_k = e^{(2k+1)i\pi/2n}$, $k = 0, \dots, 2n-1$. Celles entourées par le lacet Γ ont leur argument dans $(0, \pi) \Rightarrow k = 0, \dots, n-1$. On calcule la valeur de I_{Γ} :

$$\begin{aligned} I_{\Gamma} &= 2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}(f, z_k) \quad \operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{1}{2nz_k^{2n-1}} = -\frac{z_k}{2n} \quad \text{puisque } z_k^{2n} = -1 \\ I_{\Gamma} &= -\frac{2i\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} z_k = -\frac{i\pi}{n} e^{i\pi/2n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/n} = -\frac{i\pi}{n} e^{i\pi/2n} \frac{1 - e^{in\pi/n}}{1 - e^{i\pi/n}} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/2n)} \end{aligned}$$

$$|Rf(Re^{i\theta})| \leq R \left| \frac{1}{1 + R^{2n} e^{i2n\theta}} \right| \leq \frac{R}{R^{2n} - 1} \rightarrow 0$$

d'où $\lim_{R \rightarrow \infty} |I_C| = 0$ (2^e lemme de Jordan) ; finalement

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_{\Gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx = 2I_n = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/2n)} \Rightarrow I_n = \frac{\pi/2n}{\sin(\pi/2n)}$$

2 Intégrale I_1

a) Méthode usuelle : (voir exercice 1.1 **3**) on décompose $\frac{1}{x^3+1}$ en éléments simples et on intègre :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right] \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ I_1 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{3} \ln(x+1) \Big|_0^R - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) \Big|_0^R + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \right] \Big|_0^R \right\} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{3} \ln \frac{R+1}{\sqrt{R^2-R+1}} \right\} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

b) En intégrant $f(z) = \frac{1}{z^3+1}$ sur le contour Γ (contour 2 de la figure 4.1) : des trois pôles $z_1 = e^{i\pi/3}$, $z_2 = -1$ et $z_3 = e^{5i\pi/3}$ seul le pôle $z_1 = e^{i\pi/3}$ est entouré par le lacet ;

$$I_\Gamma = 2i\pi \operatorname{Res}(f, z_1 = e^{i\pi/3}) = 2i\pi \frac{1}{3e^{2i\pi/3}} = -\frac{2i\pi}{3} e^{i\pi/3}$$

Sur le segment CA on a $z = x e^{2i\pi/3}$ avec $x : R \searrow 0$. Donc

$$I_\Gamma = \int_0^R \frac{1}{x^3+1} dx + \int_R^0 \frac{1}{(x e^{2i\pi/3})^3 + 1} d(e^{2i\pi/3} x) + I_{C_1} = (1 - e^{2i\pi/3}) \int_0^R \frac{1}{x^3+1} + I_{C_1}$$

Sur le cercle $C_1 : z = R e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

$$I_{C_1} = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{i R e^{i\theta}}{(R e^{i\theta})^3 + 1} d\theta \Rightarrow |I_{C_1}| \leq \frac{R}{R^3 - 1} \rightarrow 0$$

Finalement

$$(1 - e^{2i\pi/3}) I_1 = -\frac{2i\pi}{3} e^{i\pi/3} \Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{3} \frac{2i}{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

c) En intégrant $f(z) = \frac{\log z}{z^3+1}$ sur le contour 3 de la figure 4.1. On prend la détermination réelle sur le bord supérieur de la coupure ; les trois pôles $z_1 = e^{i\pi/3}$, $z_2 = -1$ et $z_3 = e^{5i\pi/3}$ sont entourés par le lacet ; $\operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{\log(z_k)}{3z_k^2}$

$$I_\Gamma = 2i\pi \left(\frac{i\pi/3}{3e^{2i\pi/3}} + \frac{i\pi}{3} + \frac{5i\pi/3}{3e^{10i\pi/3}} \right) = -\frac{4i\pi^2\sqrt{3}}{9}$$

Par ailleurs

$$I_{\Gamma} = \int_{\epsilon}^R \frac{\ln x}{x^3+1} dx + \int_R^{\epsilon} \frac{\ln x + 2i\pi}{x^3+1} dx + I_{C_1} + I_{C_2} = -2i\pi \int_{\epsilon}^R \frac{1}{x^3+1} dx + I_{C_1} + I_{C_2}$$

Soit C un cercle de rayon r ,

$$|rf(re^{i\theta})| = \left| r \frac{\ln r + i\theta}{1 + r^3 e^{i3\theta}} \right| \leq \frac{r(\ln r + 2\pi)}{r^3 - 1}$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire pour majorer le numérateur et minorer le dénominateur ; en prenant tour à tour $C \equiv C_1, r = R$ et $C \equiv C_2, r = \epsilon$ on obtient par application des lemmes de Jordan : $\lim_{R \rightarrow \infty} |I_{C_1}| = 0$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |I_{C_2}| = 0$. Finalement

$$-2i\pi I_1 = -\frac{4i\pi^2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow I_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Les trois intégrales de **1** – intégrales sur \mathbb{R} de fractions rationnelles – sont des prototypes d'intégrales calculées très efficacement par la méthode du plan complexe. La méthode de **2** (c) (multiplier la fonction à intégrer par $\log z$) peut être systématisée pour calculer des intégrales sur \mathbb{R}^+ alors que le choix du contour de **2** (b) est spécifique à la forme de la fonction. La méthode classique de **2** (a) permet dans ce cas d'obtenir le résultat tout aussi efficacement. Noter l'utilisation quasi systématique de l'inégalité triangulaire dans les majorations intervenant dans l'application des lemmes de Jordan.

Problème 4.2

Ici C désigne le cercle trigonométrique : $C = \{z \mid \theta \in [0, 2\pi] \rightarrow z = e^{i\theta}\}$.

1 Dans le changement de variable $z = e^{i\theta}$ on a $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ et

$$dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{\pi} \frac{1}{(a + \cos \theta)^2} d\theta \stackrel{\text{Parité}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(a + \cos \theta)^2} d\theta \stackrel{z=e^{i\theta}}{=} \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{\left[a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^2} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{2}{i} \int_C \frac{z}{(z^2 + 2az + 1)^2} dz = \frac{2}{i} \int_C \frac{z}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} dz \end{aligned}$$

où $z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Si $a > 1$ c'est le pôle z_1 qui est entouré par le cercle unité tandis que pour $a < -1$ c'est le pôle z_2 . Dans chaque cas on a un pôle double ; on utilise la formule

intégrale de Cauchy :

$$a > 1 : I(a) = \frac{2}{i} \times 2i\pi \frac{d}{dz} \frac{z}{(z - z_2)^2} \Big|_{z_1} = \frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}}$$

$$a < -1 : I(a) = \frac{2}{i} \times 2i\pi \frac{d}{dz} \frac{z}{(z - z_1)^2} \Big|_{z_2} = -\frac{\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}}$$

résultat qu'on peut exprimer de façon plus compacte :

$$I(a) = \frac{\pi |a|}{(a^2 - 1)^{3/2}} \text{ pour } |a| > 1$$

2 Séries de Fourier

a) La fonction $f(\theta) = \frac{1}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$ est paire, donc les coefficients b_n sont nuls :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta \stackrel{z=e^{i\theta}}{=} \frac{1}{\pi} \int_C \frac{z^n}{1 - a(z + \frac{1}{z}) + a^2} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{1}{-ia\pi} \int_C \frac{z^n}{z^2 - (a + \frac{1}{a})z + 1} dz \end{aligned}$$

Les pôles sont $z_1 = a$ et $z_2 = \frac{1}{a}$. Si $|a| < 1$ c'est z_1 qui est dans le disque unité et

$$a_n = \frac{1}{-ia\pi} 2i\pi \frac{a^n}{a - \frac{1}{a}} = \frac{2a^n}{1 - a^2}$$

$$|a| < 1 : \frac{1}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \frac{1}{1 - a^2} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(n\theta) \right]$$

Si $|a| > 1$ c'est z_2 qui est dans le disque unité et

$$a_n = \frac{1}{-ia\pi} 2i\pi \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n}{\frac{1}{a} - a} = \frac{2/a^n}{a^2 - 1}$$

$$|a| > 1 : \frac{1}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \frac{1}{a^2 - 1} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{a^n} \right]$$

b) On va calculer le coefficient de la série de Fourier complexe

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{\sin t - a} e^{int} dt$$

Chapitre 4 • Intégrales complexes ; théorème des résidus

On fait le calcul pour $n \geq 0$ car comme la fonction est réelle on a $c_{-n} = \overline{c_n}$. On fait le changement de variable $z = e^{it}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}{\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) - a} z^n \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{(z^2 + 1)z^{n-1}}{z^2 - 2iaz - 1} dz$$

On considère le cas $n \geq 1$; les pôles sont $z_{1,2} = ia \pm i\sqrt{a^2 - 1}$. On pose $a = \cosh b$ ($b > 0$) ce qui simplifie l'expression des pôles : $z_{1,2} = ie^{\pm b}$. Seul $z_2 = ie^{-b}$ est entouré par le cercle unité

$$c_n = \frac{1}{2\pi} 2i\pi \left. \frac{(z^2 + 1)z^{n-1}}{z - ie^{-b}} \right|_{z=ie^{-b}} = i^{n+1} e^{-nb} = i^{n+1} (a - \sqrt{a^2 - 1})^n \quad n > 0$$

Pour $n = 0$ il y a un pôle supplémentaire en $z = 0$ dont le résidu vaut -1 et compense exactement celui du pôle $z = ie^{-b}$ si bien que $c_0 = 0$. Si on revient aux coefficients de Fourier réels (puisque la fonction est réelle)

$$\begin{aligned} a_n = 2 \operatorname{Re} c_n &= 0 \text{ si } n = 2p \\ &= 2(-1)^p e^{-(2p-1)b} \text{ si } n = 2p - 1 \\ b_n = 2 \operatorname{Im} c_n &= 0 \text{ si } n = 2p - 1 \\ &= 2(-1)^p e^{-2pb} \text{ si } n = 2p \end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{\cos t}{\sin t - a} = 2 \sum_{p \geq 1} (-1)^p e^{-2pb} [e^b \cos(2p-1)t + \sin(2pt)] \quad ; \quad e^b = a + \sqrt{a^2 - 1}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Les intégrales de fractions rationnelles de fonctions trigonométriques peuvent être calculées très efficacement en passant dans le plan complexe par le changement de variable $z = e^{i\theta}$. Attention l'intervalle d'intégration en θ doit être tel que z parcoure le cercle unité une fois en entier.

Problème 4.3

I La fonction e^{-z^2} est analytique dans \mathbb{C} donc l'intégrale le long du lacet γ est nulle en vertu du théorème de Cauchy.

$$I_\gamma = 0$$

Si on décompose I_γ le long du contour :

$$\begin{aligned} I_\gamma &= I_{AB} + I_{CA} + I_{C_1} \\ I_{AB} &= \int_0^R e^{-x^2} dx \quad I_{CA} = \int_R^0 e^{-(xe^{i\pi/4})^2} d(e^{i\pi/4}x) = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-ix^2} dx \\ I_{C_1} &= \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} iR e^{i\theta} d\theta \quad |I_{C_1}| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} d\theta \end{aligned}$$

Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow 2\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos(2\theta) \geq 1 - \frac{4\theta}{\pi}$. On a donc

$$|I_{C_1}| \leq R e^{-R^2} \int_0^{\pi/4} e^{R^2 4\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

On en déduit

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_\gamma = 0 = \int_0^\infty e^{-ix^2} dx - e^{-i\pi/4} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ix^2} dx &= \int_0^\infty \cos(x^2) dx - i \int_0^\infty \sin(x^2) dx = I_C - i I_S \\ \text{et } \int_0^\infty e^{-x^2} dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

On en déduit

$$I_C - i I_S = e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow I_C = I_S = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

2 Calcul des intégrales $J_S(\alpha)$ et $J_C(\alpha)$.

a) La fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^\alpha}$ est analytique dans le domaine délimité par Γ ; d'où (théorème de Cauchy) :

$$I_\Gamma = \int_\Gamma f(z) dz = 0$$

Sur l'arc $\gamma_2 : z = \epsilon e^{i\theta}$

$$I_{\gamma_2} = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i\epsilon(\cos\theta+i\sin\theta)}}{\epsilon^\alpha e^{i\alpha\theta}} i \epsilon e^{i\theta} d\theta \Rightarrow |I_{\gamma_2}| \leq \epsilon^{1-\alpha} \int_0^{\pi/2} e^{-\epsilon \sin\theta} d\theta \leq \frac{\pi}{2} \epsilon^{1-\alpha} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

Sur l'arc $\gamma_1 : z = R e^{i\theta}$

$$I_{\gamma_1} = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta}} i R e^{i\theta} d\theta \Rightarrow |I_{\gamma_1}| \leq R^{1-\alpha} \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin\theta} d\theta$$

La majoration $e^{-R \sin\theta} \leq 1$ est ici insuffisante puisque $R^{1-\alpha}$ est non borné quand $R \rightarrow \infty$.

En revanche pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ et

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin\theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R})$$

Si bien que

$$|I_{\gamma_1}| \leq \frac{\pi}{2} R^{-\alpha} (1 - e^{-R}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Par ailleurs

$$I_{BC} = \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x^{\alpha}} dx \quad \text{et} \quad I_{DA} = \int_R^{\epsilon} \frac{e^{i(xe^{i\pi/2})}}{(xe^{i\pi/2})^{\alpha}} d(xe^{i\pi/2}) = -e^{i(1-\alpha)\pi/2} \int_{\epsilon}^R \frac{e^{-x}}{x^{\alpha}} dx$$

On a donc, dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} I_{\gamma} &= \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^{\alpha}} dx - e^{i(1-\alpha)\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\alpha} dx = 0 \\ J_C(\alpha) + iJ_S(\alpha) &= e^{i(1-\alpha)\pi/2} \Gamma(1-\alpha) \\ J_C(\alpha) &= \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(1-\alpha) \quad J_S(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma(1-\alpha) \end{aligned}$$

b) Calcul des intégrales de Fresnel. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on retrouve les intégrales de Fresnel de la question 1 :

$$J_S\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow I_S = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Dans les deux questions il faut utiliser le théorème de Cauchy et être très attentif à la majoration de l'intégrale sur le grand cercle. L'intégrale J_C de 2 a déjà été calculée pour $\alpha = 1 - x$ par une méthode différente dans l'exercice 2.6.

Problème 4.4

1 On veut calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{x}{a + \cos x} dx$

a) En intégrant $f(z) = \frac{\log z}{z^2 + 2az + 1}$ sur le contour 3 de la figure 4.1 avec $R = 1$: les pôles de $f(z)$ sont $z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. On pose $a = \cosh b$ ($b > 0$) ce qui simplifie l'expression des pôles : $z_{1,2} = -e^{\pm b}$. Seul le pôle $z_2 = -e^{-b}$ est entouré par le lacet d'intégration puisque $|z_1| = e^b > 1$. On prend la détermination du log qui est réelle sur le bord supérieur de la coupure et on calcule par le théorème des résidus :

$$\begin{aligned} I_{\Gamma} &= \int_{\Gamma} \frac{\log z}{(z + e^b)(z + e^{-b})} dz = 2i\pi \text{Res}(f, z_2 = -e^{-b} = e^{-b+i\pi}) \\ &= 2i\pi \left[\frac{\log(-e^{-b})}{-e^{-b} + e^b} \right] = \frac{i\pi}{\sinh b} (-b + i\pi) = \frac{-i\pi b}{\sinh b} - \frac{\pi^2}{\sinh b} \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} I_{\Gamma} &= \int_{\epsilon}^1 \frac{\log x}{x^2 + 2ax + 1} dx + \int_1^{\epsilon} \frac{\log x + 2i\pi}{x^2 + 2ax + 1} dx + I_{C_1} + I_{C_2} \\ &= -2i\pi \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^2 + 2ax + 1} dx + I_{C_1} + I_{C_2} \end{aligned}$$

Sur le cercle C_2 on a

$$|zf(z)| = \epsilon \left| \frac{\log(\epsilon e^{i\theta})}{(\epsilon e^{i\theta} + e^b)(\epsilon e^{i\theta} + e^{-b})} \right| \leq \frac{\epsilon (\ln \epsilon + 2\pi)}{(e^b - \epsilon)(e^{-b} - \epsilon)} \rightarrow 0$$

D'où $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{C_2} = 0$ en vertu du 1^{er} lemme de Jordan. Par ailleurs

$$\begin{aligned} I_{C_1} &= \int_{C_1} \frac{\log z}{z^2 + 2az + 1} dz \underset{z=e^{i\theta}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{i\theta}{e^{2i\theta} + 2ae^{i\theta} + 1} i e^{i\theta} d\theta = - \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{e^{i\theta} + 2a + e^{-i\theta}} d\theta = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{a + \cos \theta} d\theta = -\frac{1}{2} I \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\frac{-i\pi b}{\sinh b} - \frac{\pi^2}{\sinh b} = -\frac{1}{2} I - 2i\pi \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2ax + 1} dx$$

En identifiant parties réelle et imaginaire :

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi^2}{\sinh b} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2ax + 1} dx = \frac{b}{2 \sinh b}$$

La deuxième intégrale pouvant être calculée directement.

- b)** En intégrant $f(z) = \frac{z}{a + \cos z}$ sur le contour Γ (contour 6 de la figure 4.3). Les pôles de $f(z)$ sont les solutions de $0 = a + \cos z = \cosh b + \cos z \Rightarrow \cos z = -\cosh b = \cos(ib + \pi)$. Les solutions sont $z_k = \pm ib + (2k + 1)\pi$. Seul le pôle $z_0 = ib + \pi$ est entouré par le lacet Γ (on rappelle que $b > 0$). On a donc

$$I_{\Gamma} = 2i\pi \frac{z}{-\sin z} \Big|_{z=ib+\pi} = \frac{2i\pi b}{\sinh b} + \frac{2\pi^2}{\sinh b}$$

Par ailleurs en décomposant l'intégrale le long du contour :

$$\begin{aligned} I_{\Gamma} &= I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA} \\ I_{AB} &= \int_0^{2\pi} \frac{x}{a + \cos x} dx = I \\ I_{BC} &= \int_0^R \frac{2\pi + iy}{a + \cos(2\pi + iy)} i dy = 2i\pi \int_0^R \frac{1}{a + \cosh y} dy - \int_0^R \frac{y}{a + \cosh y} dy \\ I_{CD} &= \int_{2\pi}^0 \frac{x + iR}{a + \cos(x + iR)} dx \Rightarrow |I_{BC}| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|x + R|}{|\sinh R - a|} dx \leq 2\pi \frac{|2\pi + R|}{|\sinh R - a|} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé $|\sinh(b)| \leq |\cos(a + ib)| \leq \cosh(b)$ qui se déduit de l'inégalité triangulaire. Il reste

$$I_{DA} = \int_R^0 \frac{iy}{a + \cos(iy)} i dy = \int_0^R \frac{y}{a + \cosh y} dy$$

Finalement

$$2i\pi \frac{b}{\sinh b} + \frac{2\pi^2}{\sinh b} = I + 2i\pi \int_0^\infty \frac{1}{a + \cosh y} dy$$

On en déduit

$$I = \frac{2\pi^2}{\sinh b} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{1}{a + \cosh y} dy = \frac{2b}{\sinh b} = \frac{2 \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

La deuxième intégrale pouvant être calculée directement.

2 On veut calculer l'intégrale

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{t^x - 1}{t^2 - 1} dt$$

a) faisons le changement de variable $t = e^u$

$$I(x) \stackrel{t=e^u}{=} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ux} - 1}{e^{2u} - 1} e^u du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ux} - 1}{\sinh u} du$$

Dans l'intégrale de départ effectuons cette fois le changement de variable $t = e^{-u}$

$$I(x) \stackrel{t=e^{-u}}{=} \int_\infty^{-\infty} \frac{e^{-ux} - 1}{e^{-2u} - 1} (-e^{-u}) du = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ux} - 1}{\sinh u} du$$

On fait la demi-somme :

$$I(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sinh(ux)}{\sinh(u)} du$$

b) On note $I_\Gamma = \int_\Gamma f(z) dz$. Les singularités de $f(z) = \frac{\sinh(zx)}{\sinh(z)}$ sont les zéros de $\sinh(z)$ sauf $z = 0 \Rightarrow z = ik\pi \quad k \in \mathbb{Z}^*$. Le lacet n'entoure aucune singularité de $f \Rightarrow I_\Gamma = 0$.

On décompose l'intégrale le long du contour

$$\begin{aligned} I_\Gamma &= I_{AB} + I_{BC} + I_{\gamma_\epsilon} + I_{CF} + I_{FA} \\ I_{AB} &= \int_{-R}^R \frac{\sinh(ux)}{\sinh(u)} du \\ I_{BC} &= \int_0^\pi \frac{\sinh((R+iy)x)}{\sinh(R+iy)} i dy \Rightarrow |I_{BC}| \leq \pi \frac{\cosh(Rx)}{\sinh(R)} \simeq \pi e^{R(|x|-1)} \rightarrow 0 \quad (|x| < 1) \\ I_{FA} &= \int_0^\pi \frac{\sinh((-R+iy)x)}{\sinh(-R+iy)} i dy \Rightarrow |I_{FA}| \leq \pi \frac{\cosh(Rx)}{\sinh(R)} \simeq \pi e^{R(|x|-1)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Pour les majorations dans I_{BC} et I_{FA} on a utilisé $|\sinh(a)| \leq |\sinh(a+ib)| \leq \cosh(a)$ qui se déduit de l'inégalité triangulaire. Sur l'arc de cercle γ_ϵ on utilise le troisième lemme de Jordan :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{\gamma_\epsilon} = -i\pi \operatorname{Res}(f, z_0 = i\pi) = -i\pi \left. \frac{\sinh(zx)}{\cosh(z)} \right|_{z=i\pi} = -i\pi \frac{\sinh(i\pi x)}{\cosh(i\pi)} = \pi \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi)} = -\pi \sin(\pi x)$$

Enfin sur $CD \cup EF$ $z = i\pi + u \Rightarrow$

$$\begin{aligned} I_{CF} &= \int_R^\epsilon + \int_{-\epsilon}^{-R} \frac{\sinh((i\pi + u)x)}{\sinh(i\pi + u)} du \\ &= \int_R^\epsilon + \int_{-\epsilon}^{-R} \frac{i \sin(\pi x) \cosh(ux) + \cos(\pi x) \sinh(ux)}{-\sinh u} du \\ &= \cos(\pi x) \int_{-R}^R \frac{\sinh(ux)}{\sinh u} du \quad \text{puisque } \int_R^\epsilon + \int_{-\epsilon}^{-R} \frac{\cosh(ux)}{\sinh u} = 0 \text{ par symétrie} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} I_\Gamma &= (1 + \cos(\pi x))(2 \times I(x)) - \pi \sin(\pi x) = 0 \\ I(x) &= \frac{\pi \sin(\pi x)}{2(1 + \cos(\pi x))} = \frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi x}{2} \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

La méthode utilisée dans **1** (a) est très spécifique de la fonction : c'est l'intégrale sur le « grand » cercle – ici de rayon $R = 1$ – qui fait apparaître l'intégrale recherchée. La méthode utilisée dans **1** (b) est plus standard : le contour s'appuie sur la périodicité de 2π du dénominateur de la fonction à intégrer. De la même façon le contour de **2** (b) s'appuie sur la périodicité de $2i\pi$ du dénominateur de la fonction à intégrer.

Problème 4.5

On veut calculer l'intégrale pour $\alpha \in]0, 1[$

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx$$

Soit $I_\Gamma = \int_\Gamma \frac{z^{\alpha-1}}{(z+1)} dz$ où Γ est le contour 3 (figure 4.1). Le pôle de f en $z = -1$ est entouré par le lacet Γ ; le théorème des résidus (ou la formule intégrale de Cauchy) donne

$$I_\Gamma = 2i\pi z^{\alpha-1} \Big|_{z=-1} = 2i\pi e^{i\pi(\alpha-1)} = -2i\pi e^{i\pi\alpha}$$

Soit γ un cercle de rayon $r : z = r e^{i\theta}$

$$|rf(r e^{i\theta})| = r \left| \frac{r^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\theta}}{r e^{i\theta} + 1} \right| \leq \frac{r^\alpha}{|r-1|} = M(r)$$

Si $r = \epsilon \rightarrow 0$ alors $M(\epsilon) = 2\pi\epsilon^\alpha \rightarrow 0 (\alpha > 0) \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |I_{C_2}| = 0$

Si $r = R \rightarrow \infty$ alors $M(R) = 2\pi R^{\alpha-1} \rightarrow 0$ ($\alpha < 1$) $\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} |I_{C_1}| = 0$

On a donc

$$\begin{aligned} I_{\Gamma} &= I_{AB} + I_{CD} + I_{C_1} + I_{C_2} \\ I_{AB} &= \int_{\epsilon}^R \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx \\ I_{CD} &= \int_R^{\epsilon} \frac{(xe^{2i\pi})^{\alpha-1}}{x+1} dx = -e^{2i\pi\alpha} \int_{\epsilon}^R \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx \end{aligned}$$

En prenant la limite $\epsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$

$$(1 - e^{2i\pi\alpha}) I = -2i\pi e^{i\pi\alpha} \Rightarrow I = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Il s'agit ici d'un grand classique parmi les intégrales calculées par les méthodes du plan complexe qui met en jeu les fonctions multiformes.

Problème 4.6

Soit $F(p) = \mathcal{L}\{t^{\alpha}u(t)\}$ la transformée de Laplace de f . Comme $t^{\alpha}u(t)$ est à croissance lente son ordre exponentiel est zéro et $F(p)$ est analytique dans le demi-plan $\text{Re } p > 0$ que l'on notera Π^+ .

1 Pour p réel on a

$$\begin{aligned} F(p) &= \mathcal{L}\{t^{\alpha}u(t)\} = \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-pt} dt \stackrel{u=pt}{=} \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{p}\right)^{\alpha} e^{-u} d\left(\frac{u}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} u^{\alpha} e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

2 La variable p est maintenant complexe. On fait le même changement de variable que ci-dessus mais la variable u devient complexe et décrit dans le plan complexe un chemin radial Δ (voir figure 4.5) incliné d'un angle $\text{Arg } p$ par rapport à l'axe réel :

$$F(p) = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_{\Delta} u^{\alpha} e^{-u} du$$

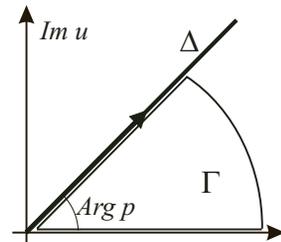


Figure 4.5

Pour évaluer l'intégrale $I_{\Delta} = \int_{\Delta} u^{\alpha} e^{-u} du$ on va calculer l'intégrale $I_{\Gamma} = \int_{\Gamma} z^{\alpha} e^{-z} dz$ où Γ est le lacet de la figure 4.5. De par le théorème de Cauchy, $I_{\Gamma} = 0$; de par le 2^e lemme de Jordan l'intégrale sur l'arc de cercle $\rightarrow 0$ quand $R \rightarrow \infty$ car

$$|z^{\alpha+1} e^{-z}| \leq R^{\alpha+1} e^{-R \cos \theta} \rightarrow 0$$

pour $\theta \in [0, \text{Arg } p]$ avec $\text{Arg } p \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui correspond au domaine d'analyticité de F .
Finalement l'intégrale sur Δ est égale à l'intégrale sur l'axe réel :

$$I_{\Delta} = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = \Gamma(\alpha + 1)$$

Donc pour p complexe dans Π^+ on a encore

$$F(p) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}$$

mais où, par continuité, c'est la détermination réelle pour p réel positif de la fonction multiforme complexe $p^{\alpha+1}$ qui doit être choisie. Du fait de l'analyticité de $F(p)$ la coupure doit être dans le demi-plan $\text{Re } p \leq 0$.

3 La transformée de Fourier de $e^{-t} t^{\alpha} u(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{F}\{e^{-t} t^{\alpha} u(t)\} = \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-(1+i2\pi\nu)t} dt = F(1 + 2i\pi\nu)$$

4 Appliquons la formule de Parseval au couple : $e^{-t} t^{\alpha} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(1 + 2i\pi\nu)$

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} t^{2\alpha} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(1 + 2i\pi\nu)|^2 d\nu$$

d'une part :

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} t^{2\alpha} dt = \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{2^{2\alpha+1}}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F(1 + 2i\pi\nu)|^2 d\nu &= [\Gamma(\alpha + 1)]^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|1 + 2i\pi\nu|^{2(\alpha+1)}} d\nu \\ &= 2 [\Gamma(\alpha + 1)]^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + 4\pi^2\nu^2)^{\alpha+1}} d\nu \stackrel{y=4\pi^2\nu^2}{=} [\Gamma(\alpha + 1)]^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{y^{-1/2}}{(1 + y)^{\alpha+1}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} [\Gamma(\alpha + 1)]^2 B\left(\frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

En égalant les deux parts on obtient

$$\frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{2^{2\alpha+1}} = \frac{1}{2\pi} [\Gamma(\alpha + 1)]^2 B\left(\frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}\right)$$

On va utiliser

$$B\left(\frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha + 1)} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

et remplacer $\Gamma(2\alpha + 1) = 2\alpha\Gamma(2\alpha)$ et $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. On en déduit le résultat

$$\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\Gamma(2\alpha)$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Où on s'aperçoit que la transformation de Laplace pour des valeurs complexes de la variable p et la transformation de Fourier sont intimement mêlées. Cela conduit à une démonstration élégante de la formule de duplication.

Problème 4.7

1 On a

$$\mathcal{F}\{e^{-t^2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-2i\pi vt} dt = e^{-\pi^2 v^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+i\pi v)^2} dt \underset{z=t+i\pi v}{=} e^{-\pi^2 v^2} \int_{\Delta_\nu} e^{-z^2} dz$$

où le contour Δ_ν est la droite $\{z \mid \text{Im } z = \pi v\}$. Pour évaluer l'intégrale $I_{\Delta_\nu} = \int_{\Delta_\nu} e^{-z^2} dz$ calculons $I_\Gamma = \int_\Gamma e^{-z^2} dz$ où Γ est le contour 8 de la figure 4.4 avec $\lambda = \pi v$. D'après le théorème de Cauchy $I_\Gamma = 0$.

Sur BC : $z = R + iy$;

$$I_{BC} = \int_0^\lambda e^{-R^2} e^{-2iRy} e^{-y^2} i dy \Rightarrow |I_{BC}| \leq e^{-R^2} \int_0^\lambda e^{-y^2} dy \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Même chose sur DA.

Sur CD on a $z = x + i\pi v$ et dans la limite où $R \rightarrow \infty$ on a $I_{CD} \rightarrow -I_{\Delta_\nu}$. Donc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_\Gamma = -I_{\Delta_\nu} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \Rightarrow I_{\Delta_\nu} = \sqrt{\pi} \quad \forall v$$

On en déduit $\mathcal{F}\{e^{-t^2}\} = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 v^2}$.

2 On veut calculer

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^4 + 1}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi vt}}{t^4 + 1} dt$$

Pour cela on intègre la fonction $f(z) = \frac{e^{-2i\pi vz}}{z^4 + 1}$ sur le contour Γ (contour 1 de la figure 4.1) :

$$I_\Gamma = \int_\Gamma \frac{e^{-2i\pi vz}}{z^4 + 1} dz$$

Les pôles de $f(z)$ sont les solutions de $z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm e^{\pm i\pi/4}$; seuls les pôles $e^{i\pi/4}$ et $-e^{-i\pi/4} = e^{3i\pi/4}$ sont entourés par le contour. Donc

$$\begin{aligned} I_{\Gamma} &= 2i\pi \left[\operatorname{Res}(f, e^{i\pi/4}) + \operatorname{Res}(f, e^{3i\pi/4}) \right] = 2i\pi \left[\frac{e^{-2i\pi\nu z}}{4z^3} \Big|_{e^{i\pi/4}} + \frac{e^{-2i\pi\nu z}}{4z^3} \Big|_{e^{3i\pi/4}} \right] \\ &= 2i\pi \left[\frac{\exp \left[-2i\pi\nu(1+i)/\sqrt{2} \right]}{4e^{3i\pi/4}} + \frac{\exp \left[-2i\pi\nu(-1+i)/\sqrt{2} \right]}{4e^{9i\pi/4}} \right] \\ &= \frac{i\pi}{2} e^{\pi\nu\sqrt{2}} \left\{ -\exp \left[i \left(-\pi\nu\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \exp \left[-i \left(-\pi\nu\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $e^{-3i\pi/4} = -e^{i\pi/4}$ et que $e^{-9i\pi/4} = e^{-i\pi/4}$. Finalement

$$I_{\Gamma} = \pi e^{\pi\nu\sqrt{2}} \sin \left(-\pi\nu\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

On décompose I_{Γ} le long du contour : $I_{\Gamma} = I_{AB} + I_C$; sur $C : z = Re^{i\theta}$

$$\begin{aligned} I_C &= \int_0^{\pi} \frac{\exp[-2i\pi\nu R(\cos\theta + i\sin\theta)]}{R^4 e^{4i\theta} + 1} iR e^{i\theta} d\theta \\ |I_C| &\leq \frac{R}{R^4 - 1} \int_0^{\pi} \exp(2\pi\nu R \sin\theta) d\theta \end{aligned}$$

Comme $\sin\theta \geq 0$ pour que $\exp(2\pi\nu R \sin\theta)$ reste bornée quand $R \rightarrow \infty$ il faut $\nu \leq 0$. Dans ce cas $\exp(2\pi\nu R \sin\theta) \leq 1$ et

$$|I_C| \leq \frac{\pi R}{R^4 - 1} \rightarrow 0 \text{ et } I_{\Gamma} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\nu t}}{t^4 + 1} dt$$

On a donc

$$\nu \leq 0 \Rightarrow \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{t^4 + 1} \right\} = \pi e^{\pi\nu\sqrt{2}} \sin \left(-\pi\nu\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Pour traiter le cas $\nu > 0$ il y a deux possibilités : soit choisir un contour dans le demi-plan $\operatorname{Im} z < 0$ qui permettra de majorer l'intégrale sur le grand cercle puisqu'on aura $\sin\theta \leq 0$, soit utiliser le fait que la fonction $f(t) = \frac{1}{t^4 + 1}$ est paire et donc qu'il en est de même de sa transformée de Fourier. Le résultat obtenu ci-dessus pour $\nu \leq 0$ est étendu *par parité* aux $\nu > 0$.

$$F(\nu) = \pi e^{-\pi|\nu|\sqrt{2}} \sin \left(\pi|\nu|\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

On peut facilement vérifier le résultat pour $\nu = 0 : F(0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^4 + 1} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{t^4 + 1} dt \stackrel{u=t^4}{=} 2 \times \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{u^{-3/4}}{u+1} du \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

3 La transformée inverse recherchée s'exprime par l'intégrale de Bromwich-Wagner

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta} \frac{e^{zt}}{z^2 + 2z + 2} dz$$

où Δ est un axe vertical qui doit se trouver dans le domaine d'analyticité de $F(z)$. La fonction $F(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$ a des pôles en $z = -1 \pm i$ donc $F(p)$ est analytique pour $\text{Re } p > -1$; on peut donc prendre $\Delta = \{p \mid \text{Re } p = 0\}$: axe imaginaire.

Pour calculer cette intégrale on va choisir un contour fermé Γ constitué d'une portion d'axe imaginaire entre $(-R, R)$ et fermé par un demi cercle C dans le demi-plan $\text{Re } z < 0$. On va calculer

$$I_{\Gamma} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{zt}}{z^2 + 2z + 2} dz$$

Les pôles de la fonction $z_{1,2} = -1 \pm i$ sont tous les deux entourés par le contour

$$\begin{aligned} I_{\Gamma} &= \frac{1}{2i\pi} \times 2i\pi \left[\text{Res} \left(\frac{e^{zt}}{z^2 + 2z + 2}, z = z_1 \right) + \text{Res} \left(\frac{e^{zt}}{z^2 + 2z + 2}, z = z_2 \right) \right] \\ &= \frac{e^{(-1+i)t}}{2i} - \frac{e^{(-1-i)t}}{2i} = e^{-t} \sin t \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} I_C &= \int_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 2z + 2} dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{Rt \cos \theta} e^{iRt \sin \theta}}{(R e^{i\theta} - z_1)(R e^{i\theta} - z_2)} i R e^{i\theta} d\theta \Rightarrow |I_C| \\ &\leq \frac{R}{(R - \sqrt{2})^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt \cos \theta} d\theta \end{aligned}$$

Si $t \geq 0$, comme $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \Rightarrow \cos \theta \leq 0$ et $e^{Rt \cos \theta} \leq 1$. Donc $I_C \rightarrow 0$ et

$$f(t) = e^{-t} \sin t \quad \text{pour } t \geq 0$$

Si $t < 0$ on prend comme contour Γ la portion d'axe imaginaire entre $(-R, R)$ et fermé par un demi cercle C dans le demi-plan $\text{Re } z > 0$ au lieu du demi-plan $\text{Re } z < 0$. Dans ce cas

$$|I_C| \leq \frac{\pi R}{(R - 2)^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt \cos \theta} d\theta.$$

On a maintenant $t < 0$ mais $\cos \theta \geq 0$ et de nouveau $e^{Rt \cos \theta} \leq 1 \Rightarrow I_C \rightarrow 0$. Cependant, il n'y a plus alors de singularité à l'intérieur du contour et donc (théorème de Cauchy) $I_{\Gamma} = 0$. On en déduit donc

$$f(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

Et finalement

$$f(t) = e^{-t} \sin t \quad u(t)$$

4 On a

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\cosh t} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi vt}}{\cosh t} dt$$

intégrale que l'on cherche à calculer. Pour cela on intègre la fonction $f(z) = \frac{e^{-2i\pi vz}}{\cosh z}$ sur le contour γ de la figure 4.4. $f(z)$ a pour pôles $z_k = (2k+1)\frac{i\pi}{2}$. Seul le pôle $z_0 = \frac{i\pi}{2}$ est entouré par le lacet Γ ; on en déduit :

$$I_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \frac{e^{-2i\pi vz}}{\cosh z} dz = 2i\pi \left. \frac{e^{-2i\pi vz}}{\sinh z} \right|_{z=\frac{i\pi}{2}} = 2\pi e^{\pi^2 \nu}$$

Sur le segment AB :

$$I_{AB} = \int_{-R}^R \frac{e^{-2i\pi vt}}{\cosh t} dt$$

Sur le segment CD :

$$I_{CD} = \int_R^{-R} \frac{e^{-2i\pi v(t+i\pi)}}{\cosh(t+i\pi)} dt = e^{2\pi^2 \nu} I_{AB}$$

Sur le segment BC : $z = R + iy$

$$I_{BC} = \int_0^{\pi} \frac{e^{-2i\pi v(R+iy)}}{\cosh(R+iy)} i dy$$

$$|I_{BC}| \leq \int_0^{\pi} \frac{e^{2\pi \nu y}}{|\cosh(R+iy)|} dy \leq \frac{1}{\sinh R} \int_0^{\pi} e^{-2\pi \nu y} dy = \frac{1 - e^{-2\pi \nu \pi}}{2\pi \nu \sin R} \rightarrow 0$$

où on a utilisé $|\sinh(a)| \leq |\cosh(a+ib)| \leq \cosh(a)$ qui se déduit de l'inégalité triangulaire. Sur DA un calcul analogue conduit au même résultat. Finalement

$$(1 + e^{2\pi^2 \nu}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi vt}}{\cosh t} dt = 2\pi e^{\pi^2 \nu}$$

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\cosh t} \right\} = \frac{\pi}{\cosh(\pi^2 \nu)}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Le calcul de transformées de Fourier et de Laplace passe souvent par le plan complexe. La transformation de Laplace inverse est par définition une intégrale dans le plan complexe mais elle est assez peu utilisée car la bonne exploitation d'une table et des propriétés de la transformation permet de résoudre la plupart des problèmes. Le calcul montre comment l'intégrale de Bromwich-Wagner engendre une fonction causale.

Problème 4.8

1 On a

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

avec $u_n = \frac{x_n}{z^n}$. Utilisons le critère de d'Alembert pour la série des valeurs absolues

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \frac{|z|^n}{|z|^{n+1}} \rightarrow \frac{R_0}{|z|}$$

Cette limite est inférieure à 1 si $|z| > R_0$. La série converge donc absolument et uniformément dans tout domaine $|z| \geq R > R_0$. Sa somme est donc une fonction analytique dans ce domaine.

2 $A(z)$, analytique dans le codisque, y admet un développement en série de Laurent centré en 0.

$$A(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{A(z)}{z^{n+1}} dz \tag{4.1}$$

où Γ est un cercle centré à l'origine et de rayon $R > R_0$. En identifiant à la transformée en Z on obtient

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \\ \implies x_n = c_{-n} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} A(z) z^{n-1} dz \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Il reste à montrer $c_n = 0$ pour $n > 0$. Pour cela posons $Z = 1/z$ dans l'équation (4.1).

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma'} G(Z) Z^{n-1} dZ$$

où $G(Z) = A(1/Z)$ et Γ' est le cercle de centre O et de rayon $\rho = 1/R$. Comme A est analytique pour $|z| > R_0$, G est analytique pour $|Z| < \rho_0 = 1/R_0$. Donc pour $n \geq 1$, $G(Z)Z^{n-1}$ est analytique dans le disque $|Z| < \rho$ et l'intégrale est nulle.

3 On considère la fonction

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{z}{z^2 - 2z \cosh a + 1} \quad a > 0 \\ &= \frac{z}{(z - e^a)(z - e^{-a})} \end{aligned}$$

a) La singularité de plus grand module est e^a puisque $a > 0$; donc $A(z)$ est analytique pour $|z| > R_0 = e^a$.

b) Utilisons pour x_n l'expression de la question 2

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{z^n}{(z - e^a)(z - e^{-a})} dz = \text{Res}(A, e^a) + \text{Res}(A, e^{-a}) \\ &= \frac{e^{na}}{(e^a - e^{-a})} + \frac{e^{-na}}{(e^{-a} - e^a)} = \frac{\sinh na}{\sinh a} \end{aligned}$$

c) On peut obtenir directement ce résultat par un développement de $A(z)$:

$$A(z) = \frac{1}{2 \sinh a} \left[\frac{e^a}{(z - e^a)} - \frac{e^{-a}}{(z - e^{-a})} \right]$$

Comme $|z| > e^a > e^{-a}$

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{2 \sinh a} \left[\frac{e^a}{z(1 - \frac{e^a}{z})} - \frac{e^{-a}}{z(1 - \frac{e^{-a}}{z})} \right] \\ &= \frac{1}{2 \sinh a} \left[\frac{e^a}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^a}{z}\right)^n - \frac{e^{-a}}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-a}}{z}\right)^n \right] \\ &= \frac{1}{2 \sinh a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{na} - e^{-na}}{z^n} \Rightarrow x_n = \frac{\sinh na}{\sinh a} \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

La transformée en Z est une série de Laurent, d'où une forte connexion entre transformation en Z et méthodes du plan complexe. Attention : une transformée en Z c'est *une application + son domaine de définition*. La même application définie sur des domaines (couronnes d'analyticité) différents conduit à des signaux numériques différents.

Problème 4.9

1) Calculons a_0 :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin t) dt \right\} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$$

Chapitre 4 • Intégrales complexes ; théorème des résidus

où on a fait le changement de variable $t' = \pi - t$ dans la deuxième intégrale. Effectuons maintenant le changement de variable $t' = \frac{\pi}{2} - t$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt &= \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t') dt' = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2} \sin 2t\right) dt = -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t) dt \end{aligned}$$

Faisons dans cette dernière intégrale le changement de variable $t' = 2t$

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin t') dt'$$

En revenant à l'expression pour a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4}{\pi} \left\{ -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt \right\} \\ &= -\ln 2 + \frac{1}{2} a_0 \Rightarrow a_0 = -2 \ln 2 \end{aligned}$$

2 Exprimons le coefficient a_n :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(\sin t) \cos(2nt) dt$$

On fait une intégration par parties en posant $u = \ln(\sin t)$ et $v' = \cos(2nt)$. On obtient

$$a_n = -\frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{\sin t} \sin 2nt dt$$

3 Calculons cette intégrale par le changement de variable $z = e^{it}$

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \frac{\sin 2nt}{\sin t} \cos t dt = -\frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 2nt}{\sin t} \cos t dt \\ &= -\frac{1}{4i\pi n} \int_C \frac{z^{2n} - \frac{1}{z^{2n}}}{z - \frac{1}{z}} \left(z + \frac{1}{z} \right) \frac{dz}{z} = -\frac{1}{4i\pi n} \int_C \frac{(z^{4n} - 1)(z^2 + 1)}{z^2 - 1} \frac{1}{z^{2n+1}} dz \end{aligned}$$

On a l'identité $z^{4n} - 1 = (z^2 - 1)(z^{4n-2} + z^{4n-4} + \dots + z^2 + 1)$; il s'ensuit

$$\begin{aligned} \frac{(z^{4n} - 1)(z^2 + 1)}{z^2 - 1} \frac{1}{z^{2n+1}} &= \frac{(z^{4n-2} + z^{4n-4} + \dots + z^2 + 1)(z^2 + 1)}{z^{2n+1}} \\ &= \frac{z^{4n} + 2(z^{4n-2} + z^{4n-4} + \dots + z^2) + 1}{z^{2n+1}} \\ &= \frac{1}{z^{2n+1}} + \frac{2}{z^{2n-1}} + \frac{2}{z^{2n-3}} + \dots + \frac{2}{z} + 2z + \dots + 2z^{2n-3} + z^{2n-1} \end{aligned}$$

La seule singularité de cette fonction est un pôle d'ordre $2n + 1$ en $z = 0$. Le résidu est le coefficient du terme en $\frac{1}{z}$ qui vaut 2. Donc

$$\int_C \frac{(z^{4n} - 1)(z^2 + 1)}{z^2 - 1} \frac{1}{z^{2n+1}} dz = 4i\pi$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{1}{4i\pi n} 4i\pi = -\frac{1}{n}$$

Finalement

$$\ln(|\sin t|) = -\ln 2 - \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2nt)}{n} \quad ; \quad t \neq k\pi$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Le théorème des résidus permet de calculer simplement une intégrale trigonométrique non triviale et conduit à un développement en série de Fourier d'une fonction (intégrable) non bornée.

5

DISTRIBUTIONS

RAPPELS DE COURS

Définition 5.1

On note \mathcal{S} l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, à décroissance rapide¹. Une *distribution tempérée* T est une *fonctionnelle* linéaire et continue de $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} T : \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\rightarrow \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

L'ensemble des distributions tempérées est un espace vectoriel sur \mathbb{C} noté \mathcal{S}' .

- *Distributions régulières*

À toute fonction tempérée f (localement sommable et à croissance lente) on associe une distribution notée $[f]$ et dite *régulière*

$$[f] : \varphi \rightarrow \langle [f], \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt$$

On fera fréquemment un abus d'écriture en notant $[f(t)]$ au lieu de $[f]$ la distribution associée à la fonction $t \rightarrow f(t)$.

- *Distributions singulières*

Ce sont les distributions dans \mathcal{S}' qui ne sont pas régulières (auxquelles on ne peut pas associer une fonction). Exemples :

– Dirac $\delta : \varphi \rightarrow \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$;

– Pseudo-fonction $\frac{1}{t}$, $\text{Pf}\frac{1}{t} : \varphi \rightarrow \langle \text{Pf}\frac{1}{t}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right\}$

– Pseudo-fonction $\frac{1}{t^2}$, $\text{Pf}\frac{1}{t^2} : \varphi \rightarrow \langle \text{Pf}\frac{1}{t^2}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt - \frac{2\varphi(0)}{\epsilon} \right\}$

- *Égalité de deux distributions*

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow \langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

1. ϕ est à décroissance rapide si ϕ est C^∞ et $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$ on a $\lim_{|t| \rightarrow \infty} |t^n \phi^{(p)}(t)| = 0$.

• *Multiplication par une fonction tempérée* C^∞

$gT : \varphi \rightarrow \langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$; on écrira souvent $g(t)T$ à la place de gT .

• *Symétrie*

À toute distribution T on associe la distribution T_- (l'analogue de la fonction $f(-t)$) définie par $\varphi \rightarrow \langle T_-, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_- \rangle$ où $\varphi_-(t) = \varphi(-t)$; une distribution est paire (impaire) si $T_- = \pm T$.

• *Translation d'une distribution*

$T \rightarrow T_a : \varphi \rightarrow \langle T_a, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_{-a} \rangle$ où $\varphi_{-a}(t) = \varphi(t+a)$.

• *Dérivée*

$T' : \varphi \rightarrow \langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$; on montre par exemple que $[u]' = \delta$ (voir exercice 5.2 **2**) : si f a une discontinuité de première espèce en t_0 de saut σ_{t_0} alors $f = f_c + \sigma_{t_0}u_{t_0}$ où f_c est une fonction continue et $[f]' = [f_c]' + \sigma_{t_0}\delta_{t_0}$

– La suite $\{T_n\}$ converge dans \mathcal{S}' si $\forall \varphi \in \mathcal{S} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle$ existe. Dans ce cas la limite de la suite $\{T_n\}$ est la distribution T telle que $\forall \varphi \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.

– La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} T_n$ converge dans \mathcal{S}' si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle T_n, \varphi \rangle$ converge $\forall \varphi \in \mathcal{S}$. Sa somme T est la distribution de \mathcal{S}' telle que $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle T_n, \varphi \rangle \forall \varphi \in \mathcal{S}$.

Exemple : le peigne de Dirac de période $T : \text{III}_T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT}$.

• *Transformée de Fourier* $\mathcal{F}(T)$

$\langle \mathcal{F}\{T\}, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle$ (on rappelle que si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $\mathcal{F}\{\varphi\} \in \mathcal{S}$; voir exercice 2.3).

T	$\mathcal{F}(T)$	T	$\mathcal{F}(T)$
δ	[1]	III_T	$\frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}$
δ_a	$e^{-2i\pi\nu a} [1] = [e^{-2i\pi\nu a}]$	$[u]$	$\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2i\pi} \text{Pf} \frac{1}{\nu}$
$\delta^{(n)}$	$(2i\pi\nu)^n [1] = [(2i\pi\nu)^n]$	[sign]	$\frac{1}{i\pi} \text{Pf} \frac{1}{\nu}$
$[t^n]$	$\frac{1}{(-2i\pi)^n} \delta^{(n)}$	$\text{Pf} \frac{1}{t}$	$-i\pi [\text{sign}]$
$[\exp(2i\pi\nu_0 t)]$	δ_{ν_0}	$[t]$	$\frac{-1}{2\pi^2} \text{Pf} \frac{1}{\nu^2}$

où $[1]$ est la distribution associée à la fonction constante $t \rightarrow 1$. On note III le peigne de Dirac de période $T = 1$.

ÉNONCÉS DES EXERCICES

5.1 Distributions tempérées

1 Les applications suivantes sont-elles des fonctionnelles linéaires de $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ (on ne vérifiera pas la continuité) ? Le cas échéant, préciser de quelle distribution il s'agit.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \phi \rightarrow \langle T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt & \text{b) } \phi \rightarrow \langle T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)| dt \\ \text{c) } \phi \rightarrow \langle T, \phi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(0) & \text{d) } \phi \rightarrow \langle T, \phi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n) \end{array}$$

2 Montrer que $[f]_- = [f_-]$ et $[f]_a = [f_a]$

3 Montrer que

$$\text{a) } \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a) \quad \text{b) } \left(\text{Pf} \frac{1}{t} \right)_a = \text{Pf} \frac{1}{t-a} \quad \text{c) } \delta \text{ est paire ; } \text{Pf} \frac{1}{t} \text{ est impaire}$$

4 Multiplication par une fonction

$$\text{a) calculer } 1) t\delta \quad 2) t \text{Pf} \frac{1}{t} \quad 3) t \text{Pf} \frac{1}{t^2}$$

b) Montrer que pour f tempérée $C^\infty : [f] = f [1]$.

c) Soit g une fonction tempérée C^∞ ayant des zéros simples en $\{t_k\}$, $k \in [1, n]$; montrer que la distribution

$$T = \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta_{t_k}$$

où les α_k sont des constantes arbitraires, est solution de l'équation $gT = 0$;

Application : trouver T dans \mathcal{S}' telle que $\sin(\pi t)T = 0$.

5 *Série* : montrer que la série qui définit le peigne de Dirac est convergente dans \mathcal{S}' .

5.2 Dérivées

1 Dérivées de δ

a) Montrer que $t^n \delta^{(p)} = 0$ pour $n > p$.

b) Calculer $t^n \delta^{(n)}$.

2 Montrer que $[u]_{t_0}' = \delta_{t_0}$.

3 Dérivée de fonctions discontinues

a) Montrer que si f , fonction tempérée, a une discontinuité de 1ère espèce en t_0 de saut σ_{t_0} alors on peut définir f_c continue telle que $f = f_c + \sigma_{t_0} u_{t_0}$.

b) En déduire $[f]' = [f_c]' + \sigma_{t_0} \delta_{t_0}$.

4 Calculer la dérivée des distributions suivantes

a) $[|t|]$ b) $[\text{sign}]$ c) $[\ln |t|]$ d) $\text{Pf} \frac{1}{t}$

5.3 Convolution

Le produit de convolution de deux distributions ne peut être défini que sous certaines conditions sur le support des distributions intervenant dans le produit. En revanche on peut toujours définir la *régularisée* d'une distribution :

$$\phi \in \mathcal{S}, \quad T \in \mathcal{S}' \rightarrow T * \phi = \langle T, \phi_{y-} \rangle$$

où $\phi_{y-}(x) = \phi(y-x)$. Le résultat est donc une *fonction* de y que l'on interprète comme le *produit de convolution d'une distribution avec une fonction*. Pour une distribution donnée on peut étendre les conditions d'application à toute fonction (pas nécessairement dans \mathcal{S}) telle que le membre de droite ait un sens.

1 Calculer $\delta^{(n)} * \phi$ puis $\delta_a * \phi$.

2 Montrer que

$$\text{Pf} \frac{1}{x} * \phi = \text{PP} \int \frac{\phi(y')}{y-y'} dy'$$

où PP désigne la partie principale de Cauchy.

5.4 Transformée de Fourier

1 Établir que les propriétés suivantes de la transformation de Fourier des fonctions se généralisent aux distributions tempérées :

a) $\mathcal{F} \{ e^{2i\pi\nu_0 t} f(t) \} = \mathcal{F} \{ f(t) \} |_{\nu-\nu_0}$

b) $\mathcal{F} \{ f(t-t_0) \} = e^{-2i\pi\nu t_0} \mathcal{F} \{ f(t) \}$

c) $\mathcal{F} \{ f'(t) \} = -2i\pi\nu \mathcal{F} \{ f(t) \}$

d) $\mathcal{F} \{ t f(t) \} = -\frac{1}{2i\pi} \mathcal{F} \{ f(t) \}'$

2 Établir que $\mathcal{F} \{ [1] \} = \delta$ et en déduire à l'aide des résultats de la question précédente les transformées de Fourier $\mathcal{F} \{ [t] \}$, $\mathcal{F} \{ [e^{2i\pi\nu_0 t}] \}$.

5.5 Transformée de Fourier

1 Déterminer la transformée de Fourier \widehat{T} de la distribution tempérée $\text{Pf} \frac{1}{t^2}$

$$\text{Pf} \frac{1}{t^2} : \phi \rightarrow \left\langle \text{Pf} \frac{1}{t^2}, \phi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(t)}{t^2} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t^2} dt - 2 \frac{\phi(0)}{\epsilon} \right\}$$

en utilisant l'identité $\text{Pf} \frac{1}{t^2} = - \left(\text{Pf} \frac{1}{t} \right)'$.

- 2 Déterminer la transformée de Fourier *au sens des distributions* de la fonction $t \rightarrow tu(t)$.

ÉNONCÉS DES PROBLÈMES

Problème 5.1 Transformée de Fourier de l'échelon de Heaviside

La fonction $t \rightarrow u(t)$ n'admet pas de transformée de Fourier au sens des fonctions. En revanche on peut définir la transformée de Fourier de la distribution régulière $[u]$ associée à cette fonction. On note $U = \mathcal{F}\{[u]\}$ sa transformée de Fourier. L'objectif de ce problème est de déterminer U .

- 1 On prend la transformée de Fourier de l'équation $[u]' = \delta$. En déduire que $U = \frac{1}{2i\pi} \text{Pf} \frac{1}{t} + a\delta$ où a est une constante arbitraire.
- 2 Déterminer cette constante en évaluant U sur la fonction test $\phi_0(t) = e^{-\pi t^2}$ de deux façons différentes.
- 3 Application : retrouver la transformée de Fourier de la fonction « porte » Π_T (chapitre 2).

Problème 5.2 Convolution et transformée de Fourier – Relations de Kramers-Kronig

Voir au préalable l'exercice 5.3.

- 1 Si T est une distribution *régulière* associée à une fonction tempérée f intégrable (ou de carré intégrable), $T = [f]$, montrer que $T * \varphi = f * \varphi$.
Dans ce cas on conclut que $\mathcal{F}\{T * \varphi\} = \mathcal{F}\{f * \varphi\} = \mathcal{F}\{f\} \mathcal{F}\{\varphi\}$.

On généralise ce résultat au cas où la distribution T est *singulière* mais possède une transformée de Fourier qui est régulière : $\exists F$ tempérée telle que $\mathcal{F}(T) = [F]$. Alors $\mathcal{F}(T * \varphi) = F \cdot \phi$ où $\phi = \mathcal{F}(\varphi)$.

Inversement si f est tempérée mais n'admet pas de transformée de Fourier au sens des fonctions, et $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $\mathcal{F}(f \cdot \varphi) = \mathcal{F}([f]) * \mathcal{F}(\varphi)$.

- 2 Application : *Relation de Kramers-Kronig*. Soit φ une fonction causale admettant une transformée de Fourier ϕ ; la causalité se traduit par l'identité $\varphi = \varphi \cdot u$ où u est l'échelon de Heaviside.
a) En prenant la transformée de Fourier de cette équation au sens de 1 établir que

$$\phi(\nu) = \frac{1}{i\pi} \text{PP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu'$$

- b) Établir les relations de Kramers-Kronig entre la partie réelle $A(\nu)$ et la partie imaginaire $B(\nu)$ de $\phi(\nu)$.

Problème 5.3 Transformée de Fourier du peigne de Dirac : $\text{III} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$

On désigne par $\{e_n\}$ la suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C}

$$t \mapsto e_n(t) = e^{-2i\pi nt} \quad n \in \mathbb{Z}$$

et par $[e_n]$ la distribution tempérée associée à la fonction e_n .

- 1 Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} [e_n]$ est convergente dans \mathcal{S}' .
- 2 On désigne sa somme par T .
 - a) Montrer que $e_1 T = T$.
 - b) Montrer que $T_1 = T$, où T_1 désigne la distribution T décalée de 1.
 - c) Dédire de ces résultats que $T = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ où δ_n est la distribution de Dirac décalée de n et a une constante arbitraire.
 - d) En calculant de deux façons différentes le nombre $\langle T, \phi_0 \rangle$ avec $\phi_0(t) = e^{-\pi t^2}$, montrer que $a = 1$.
- 3 Dédire des questions précédentes quelle est la transformée de Fourier du peigne de Dirac : $\text{III} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$.

Problème 5.4 Spectre d'une fonction périodique

- 1 Soit f une fonction continue, périodique de période $T = 1$ représentée par sa série de Fourier

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nt}$$

On désigne par $[e_n]$ ($n \in \mathbb{Z}$) la distribution régulière associée à la fonction $e_n(t) = e^{2i\pi nt}$ et par $[f]$ la distribution régulière associée à la fonction f .

Montrer que

$$[f] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n [e_n]$$

- 2 La fonction f n'admet pas de transformée de Fourier au sens des fonctions mais on peut définir la transformée de Fourier de la distributions $[f]$.
Montrer que

$$\mathcal{F}\{[f]\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_n$$

- 3 On va retrouver ce résultat par une autre voie et en même temps vérifier qu'on peut utiliser le théorème de la transformée de Fourier d'un produit de convolution d'une distribution avec

Chapitre 5 • Distributions

une fonction même si la transformée de Fourier de la distribution est une distribution singulière (voir problème 5.2).

a) Soit ϕ une fonction de support $[0, 1]$, continue sur $]0, 1[$, qui satisfait $\phi(0) = \phi(1)$ et telle que

$$\begin{aligned}\phi(t) &= f(t) \text{ pour } t \in [0, 1] \\ &= 0 \text{ sinon}\end{aligned}$$

Montrer que

$$f = \text{III} * \phi$$

b) À l'aide du résultat de **1** vérifier que :

$$\mathcal{F}\{[f]\} = \mathcal{F}\{\text{III}\} \mathcal{F}\{\phi\}$$

Problème 5.5 Transformée de Fourier du peigne de Dirac de période τ :

$$\text{III}_\tau = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n\tau}$$

1 Développer en série de Fourier complexe la fonction $g(t)$ périodique de période T , définie pour $t \in [0, T]$ par :

$$g(t) = -t^2 + tT - \frac{T^2}{6}$$

2 On désigne par $[e_n]$ ($n \in \mathbb{Z}$) la distribution régulière associée à la fonction à valeurs complexes :

$$e_n : t \mapsto e_n(t) = e^{-in\omega t}$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et par $[g]$ la distribution associée à g . Le résultat de **1** du problème 5.4 permet d'écrire

$$[g] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n [e_n]$$

(où les c_n sont les coefficients trouvés en **1**).

Montrer que les séries

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-in\omega) c_n [e_n] \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-in\omega)^2 c_n [e_n]$$

sont convergentes dans \mathcal{S}' et que leur somme est $[g]'$ et $[g]''$ respectivement (on utilisera la définition de la dérivation dans \mathcal{S}').

3 En calculant directement $[g]'$ puis $[g]''$ montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} [e_n] = T \text{III}_T$$

où $\text{III}_T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT}$ désigne le peigne de Dirac de période T .

- 4 Déduire des questions précédentes quelle est la transformée de Fourier du peigne de Dirac III_τ de période τ .

Problème 5.6 Transformée de Fourier du logarithme

La fonction $t \rightarrow \ln |t|$ n'admet pas de transformée de Fourier au sens des fonctions. En revanche, on peut définir la transformée de Fourier de la distribution régulière associée à cette fonction. On désigne par $T = [\ln |t|]$ cette distribution et par $\hat{T} = \mathcal{F}\{T\}$ sa transformée de Fourier. L'objectif de ce problème est de déterminer \hat{T} .

On désigne par $\text{Pf} \frac{1}{|t|}$ la distribution tempérée définie par

$$\phi \in \mathcal{S} \rightarrow \left\langle \text{Pf} \frac{1}{|t|}, \phi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(t)}{|t|} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(t)}{|t|} dt + 2\phi(0) \ln \epsilon \right\}$$

- 1 a) Calculer $\left\langle \text{Pf} \frac{1}{|t|}, \phi_0 \right\rangle$ avec $\phi_0(t) = e^{-\pi t^2}$.

b) Montrer que $t \text{Pf} \frac{1}{|t|} = [\text{sign}]$ où $[\text{sign}]$ désigne la distribution associée à la fonction $\text{signe}(t)$.

- 2 En prenant la transformée de Fourier de l'équation $T' = \text{Pf} \frac{1}{t}$ (exercice 5.2), établir que \hat{T} est de la forme :

$$\hat{T} = -\frac{1}{2} \text{Pf} \frac{1}{|\nu|} + a\delta$$

où a est une constante arbitraire.

- 3 Déterminer cette constante en évaluant \hat{T} sur la fonction test $\phi_0(t) = e^{-\pi t^2}$.

DU MAL À DÉMARRER ?

- 5.1 1 Vérifier la linéarité de l'application et vérifier qu'elle est définie $\forall \phi \in \mathcal{S}$.

2 et 3 Utiliser les définitions.

4 c) Montrer au préalable que $g\delta = g(0)\delta$.

- 5.2 Utiliser les définitions.

4 c) Utiliser le fait qu'une intégrale convergente au sens standard converge aussi en partie principale.

- 5.3 Appliquer les définitions.

- 5.4 Là aussi il faut enchaîner les définitions des distributions et les propriétés de la transformation de Fourier des fonctions.

5.5 Pour **1** on peut aussi utiliser $t\text{Pf}\frac{1}{t^2} = \text{Pf}\frac{1}{t}$; pour **2**, utiliser $\mathcal{F}\{tT\} = \left(-\frac{1}{2i\pi}\right) [\mathcal{F}\{T\}]'$.

Problème 5.1

Dans **1** penser que $T = \delta$ est solution de $tT = 0$.

3 Calculer la transformée de Fourier de la distribution régulière associée à la fonction « porte » exprimée en termes de la distribution de Heaviside.

Problème 5.2

Utiliser les définitions de l'exercice 5.3

Problème 5.3

La suite $\sum_n T_n$ converge dans \mathcal{S}' ssi la suite numérique $\sum_n \langle T_n, \phi \rangle$ converge $\forall \phi$.

2 Utiliser le résultat de l'exercice 5.1 **3 c**).

Problème 5.4

1 Attention à la permutation série-intégrale.

Problème 5.5

Même indication que dans le problème 5.3 pour la convergence des séries. Être attentif au coefficient d'indice 0 dans les séries manipulées.

Problème 5.6

1 On peut utiliser les résultats de l'exercice 1.10 **2**. Pour **2**, là encore penser que $T = \delta$ est solution de $tT = 0$.

Corrigés des exercices

5.1 **1** Quelles sont les fonctionnelles linéaires ?

a) Oui : une fonction C^∞ à décroissance rapide est intégrable donc l'application est définie $\forall \phi \in \mathcal{S}$; par ailleurs l'intégrale est une application linéaire par rapport à l'intégrant ; on reconnaît la distribution $T = [1]$.

b) Non : l'application n'est pas linéaire.

c) Non ; l'application n'est pas définie $\forall \phi \in \mathcal{S}$. On peut trouver des fonctions de \mathcal{S} telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{(n)}(0)$ ne tende pas vers zéro (condition nécessaire de convergence de la série) exemple $\phi(t) = e^{-t^2}$.

d) Oui car ϕ est à décroissance rapide donc la série converge $\forall \phi \in \mathcal{S}$; l'application est linéaire et on identifie $T = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$ puisque $\phi(n) = \langle \delta_n, \phi \rangle$ (voir question suivante).

2 En appliquant les définitions

$$\langle [f]_-, \phi \rangle = \langle [f], \phi_- \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(-t)dt \stackrel{t'=-t}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(-t')\phi(t')dt' = \langle [f_-], \phi \rangle$$

$$\langle [f]_a, \phi \rangle = \langle [f], \phi_{-a} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t+a)dt \stackrel{t'=t+a}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t'-a)\phi(t')dt' = \langle [f_a], \phi \rangle$$

3 On applique les définitions

a) Appliquons successivement la définition de la translation puis celle de δ :

$$\langle \delta_a, \phi \rangle = \langle \delta, \phi_{-a} \rangle = \phi_{-a}(0) = \phi(t+a)|_{t=0} = \phi(a)$$

b) Même chose mais avec la pseudo-fonction :

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\text{Pf} \frac{1}{t} \right)_a, \phi \right\rangle &= \left\langle \text{Pf} \frac{1}{t}, \phi_{-a} \right\rangle = PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{-a}(t)}{t} dt = PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t+a)}{t} dt \\ &= PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t')}{t'-a} dt' = \left\langle \text{Pf} \frac{1}{t-a}, \phi \right\rangle \end{aligned}$$

c) Dans les deux cas on enchaîne la définition de la symétrie puis celle des distributions mises en jeu :

$$\begin{aligned} \langle \delta_-, \phi \rangle &= \langle \delta, \phi_- \rangle = \phi_-(0) = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle \Rightarrow \delta_- = \delta \\ \left\langle \left(\text{Pf} \frac{1}{t} \right)_-, \phi \right\rangle &= \left\langle \text{Pf} \frac{1}{t}, \phi_- \right\rangle = PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_-(t)}{t} dt = PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(-t)}{t} dt \\ &= -PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t')}{t'} dt' = - \left\langle \text{Pf} \frac{1}{t}, \phi \right\rangle \Rightarrow \left(\text{Pf} \frac{1}{t} \right)_- = -\text{Pf} \frac{1}{t} \end{aligned}$$

4 On applique la définition :

a)

$$1) \quad t\delta : \quad \langle t\delta, \phi \rangle = \langle \delta, t\phi \rangle = t\phi(t)|_{t=0} = 0 \\ \Rightarrow t\delta = 0$$

$$2) \quad t\text{Pf} \frac{1}{t} : \quad \left\langle t\text{Pf} \frac{1}{t}, \phi \right\rangle = \lim \int_{|t|>\epsilon} \frac{t\phi(t)}{t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = \langle [1], \phi \rangle \\ \Rightarrow t\text{Pf} \frac{1}{t} = [1]$$

$$3) \quad t\text{Pf} \frac{1}{t^2} : \quad \left\langle t\text{Pf} \frac{1}{t^2}, \phi \right\rangle = \lim \left\{ \int_{|t|>\epsilon} \frac{t\phi(t)}{t^2} dt - 2 \frac{t\phi(t)|_{t=0}}{\epsilon} \right\} = \lim \int_{|t|>\epsilon} \frac{\phi(t)}{t} dt \\ \Rightarrow t\text{Pf} \frac{1}{t^2} = \text{Pf} \frac{1}{t}$$

- b) On enchaîne définition d'une distribution régulière et définition de la multiplication d'une distribution par une fonction :

$$\begin{aligned}\langle [f], \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \times f(t)\phi(t)dt \\ &= \langle [1], f\phi \rangle = \langle f [1], \phi \rangle\end{aligned}$$

- c) On a : $g\delta_a : \langle g\delta_a, \phi \rangle = \langle \delta_a, g\phi \rangle = g(a)\phi(a) = \langle g(a)\delta_a, \phi \rangle \Rightarrow g\delta_a = g(a)\delta_a$
Par conséquent si g a un zéro en t_k

$$g\delta_{t_k} = g(t_k)\delta_{t_k} = 0$$

et donc

$$g \sum_k \alpha_k \delta_{t_k} = \sum_k \alpha_k g\delta_{t_k} = \sum_k \alpha_k g(t_k) \delta_{t_k} = 0$$

On en conclut que $T = \sum_k \alpha_k \delta_{t_k}$ est bien solution de $gT = 0$.

Si $g(t) = \sin(\pi t) \Rightarrow t_k = k \in \mathbb{Z}$; on en déduit que la solution de $\sin(\pi t)T = 0$ est $T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \delta_k$.

- 5 Le peigne de Dirac est défini par $\text{III} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$. Pour montrer que cette série converge montrons que $\forall \phi$ la série de terme général $\langle \delta_n, \phi \rangle$ converge : $\langle \delta_n, \phi \rangle = \phi(n)$. Comme ϕ est à décroissance rapide on a :

$$\exists N \mid n \geq N \Rightarrow |\phi(n)| \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{avec } \alpha > 1$$

En utilisant le critère de comparaison avec la série de Riemann on en déduit que la série converge.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La plupart des démonstrations résultent d'un enchaînement simple des propriétés adéquates. Dans 3 c) la solution obtenue est la plus générale si les zéros de g sont des zéros **simples**. Si g a un zéro **double** en t_k alors $\alpha_k \delta_{t_k}$ est solution de $gT = 0$ mais aussi $\beta_k \delta'_{t_k}$ (voir exercice suivant). On généralise au cas où le zéro de g est d'ordre n .

5.2 1 Dérivées de δ

- a) Calculons $\langle t^n \delta^{(p)}, \phi \rangle = \langle \delta^{(p)}, t^n \phi \rangle = (-1)^p \langle \delta, (t^n \phi)^{(p)} \rangle = (-1)^p (t^n \phi)^{(p)} \Big|_{t=0}$. On utilise la formule de Leibniz (voir chapitre 1)

$$(t^n \phi)^{(p)} = \sum_{k=0}^p C_p^k (t^n)^{(k)} \phi^{(p-k)} = \sum_{k=0}^p C_p^k \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} \phi^{(p-k)}$$

Comme $n > p$ l'exposant $n - k > n - p > 0$; chaque terme de la somme comptera une puissance positive de t qui s'annulera pour $t = 0$. Finalement $t^n \delta^{(p)} = 0$

b) Utilisons le résultat de la question précédente en faisant $p = n$. Il vient

$$\langle t^n \delta^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n (t^n \phi)^{(n)} \Big|_{t=0}$$

Dans l'application de la formule de Leibniz pour le calcul de la dérivée $n^{\text{ième}}$ en $t = 0$ il reste le terme constant ($k = n$) ce qui conduit au résultat

$$\langle t^n \delta^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n n! \phi(0) \Rightarrow t^n \delta^{(n)} = (-1)^n n! \delta$$

2 Enchaînons les définitions d'une distribution régulière et de la dérivée

$$\begin{aligned} \langle [u]_{t_0}', \phi \rangle &= \langle [u]', \phi_{-t_0} \rangle = -\langle [u], \phi'_{-t_0} \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \phi'(t + t_0) dt \\ &= -\int_0^{\infty} \phi'(t + t_0) dt = \phi(t_0) = \langle \delta_{t_0}, \phi \rangle \\ \Rightarrow [u]_{t_0}' &= \delta_{t_0} \end{aligned}$$

3 Dérivée de fonctions discontinues

a) Si f a une discontinuité de première espèce en t_0 on a $f(t_0^+) = f(t_0^-) + \sigma_{t_0}$ où σ_{t_0} est le saut à la discontinuité. Donc la fonction f_c définie par

$$\begin{aligned} f_c(t) &= f(t) \text{ pour } t < t_0 \\ &= f(t) - \sigma_{t_0} \text{ pour } t \geq t_0 \end{aligned}$$

est continue en t_0 : $f_c(t_0^+) = f_c(t_0^-)$. Cette équation de définition de f_c peut être réécrite en utilisant la fonction de Heaviside

$$\begin{aligned} f_c(t) &= f(t) - \sigma_{t_0} u(t - t_0) \\ \Rightarrow f &= f_c + \sigma_{t_0} u_{t_0} \end{aligned}$$

b) On associe à chaque fonction (tempérée) de l'équation ci-dessus sa distribution régulière

$$[f] = [f_c] + \sigma_{t_0} [u_{t_0}]$$

et on dérive (au sens des distributions). La fonction f_c étant continue on a $[f_c]' = [f_c']$ qui s'exprime en disant « la dérivée de la distribution régulière associée à la fonction f_c = la distribution régulière associée à f_c' ». Par ailleurs $[u]_{t_0}' = \delta_{t_0}$. Finalement

$$[f]' = [f_c'] + \sigma_{t_0} \delta_{t_0}$$

4 On calcule la dérivée des distributions suivantes :

a) $|t|$ est continue ; donc $[|t|]' = [|t|'] = [\text{sign}]$

Chapitre 5 • Distributions

b) La fonction $\text{sign}(t) = -1 + 2u(t)$ a un saut de $+2$ en $t = 0$: $[\text{sign}]' = 0 + 2\delta$

c) Utilisons les définitions de la distribution logarithme et de la dérivée :

$$\begin{aligned} [\ln |t|]' : \phi \rightarrow \langle [\ln |t|]', \phi \rangle &= - \langle [\ln |t|], \phi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \ln |t| \phi'(t) dt \\ &= - \lim_{\epsilon} \int_{|t| > \epsilon} \ln |t| \phi'(t) dt \end{aligned}$$

Cette dernière égalité vient du fait qu'une intégrale convergente au sens standard a même valeur que son intégrale en partie principale (voir chapitre 1).

$$\begin{aligned} \langle [\ln |t|]', \phi \rangle &= - \ln |t| \phi(t) \Big|_{-\infty}^{-\epsilon} - \ln |t| \phi(t) \Big|_{\epsilon}^{\infty} + \lim_{\epsilon} \int_{|t| > \epsilon} \frac{\phi(t)}{t} dt = \left\langle \text{Pf} \frac{1}{t}, \phi \right\rangle \\ \Rightarrow [\ln |t|]' &= \text{Pf} \frac{1}{t} \end{aligned}$$

d) Même méthode pour la pseudo-fonction

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\text{Pf} \frac{1}{t} \right)', \phi \right\rangle &= - \left\langle \left(\text{Pf} \frac{1}{t} \right), \phi' \right\rangle = - \lim_{\epsilon} \int_{|t| > \epsilon} \frac{\phi'(t)}{t} dt \\ &= - \lim_{\epsilon} \left\{ \frac{\phi(t)}{t} \Big|_{-\infty}^{-\epsilon} + \frac{\phi(t)}{t} \Big|_{\epsilon}^{\infty} - \int_{|t| > \epsilon} \frac{\phi(t)}{t^2} dt \right\} \\ &= - \lim_{\epsilon} \left\{ 2 \frac{\phi(0)}{\epsilon} - \int_{|t| > \epsilon} \frac{\phi(t)}{t^2} dt \right\} \\ &= - \left\langle \left(\text{Pf} \frac{1}{t^2} \right), \phi \right\rangle \Rightarrow \left(\text{Pf} \frac{1}{t} \right)' = - \text{Pf} \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Dans les questions **2** et **3** apparaissent les premières justifications rigoureuses des résultats obtenus dans le cadre de la théorie « phénoménologique » des distributions utilisée aux chapitres 1 et 2.

5.3 **1** Appliquons la définition

$$\delta^{(n)} * \phi : y \rightarrow \langle \delta^{(n)}, \phi_{y-} \rangle = (-1)^n \phi_{y-}^{(n)}(0)$$

On va expliciter la dérivée de la fonction dans le membre de droite

$$\begin{aligned} \phi_{y-}^{(n)}(0) &= \frac{d^n}{dx^n} \phi(y-x) \Big|_{x=0} = (-1)^n \phi^{(n)}(y) \\ \Rightarrow \delta^{(n)} * \phi &= \phi^{(n)} \end{aligned}$$

De la même façon

$$\delta_a * \phi : y \rightarrow \langle \delta_a, \phi_{y-} \rangle = \phi_{y-}(a)$$

Explicitons la fonction du membre de droite

$$\begin{aligned} \phi_{y-}(a) &= \phi(y-x)|_{x=a} = \phi(y-a) = \phi_a(y) \\ \Rightarrow \delta_a * \phi &= \phi_a \end{aligned}$$

2 Appliquons maintenant à la pseudo-fonction

$$\begin{aligned} \text{Pf} \frac{1}{x} * \phi &= \left\langle \text{Pf} \frac{1}{x}, \phi_{y-} \right\rangle = \text{PP} \int \frac{\phi(y-x)}{x} dx \\ &= \text{PP} \int \frac{\phi(y')}{y-y'} dy' \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La convolution de deux distributions est un problème compliqué ; la « régularisation » en est une version simplifiée mais qui permet d'obtenir ici des résultats utiles. Notons que l'application qui associe à une fonction ϕ l'intégrale $\frac{1}{\pi} \text{PP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x')}{x-x'} dx'$ est appelée transformée de Hilbert de ϕ et notée $\mathcal{H}\{\phi\}$.

5.4 1 On va établir que les propriétés de la transformation de Fourier des fonctions restent valables pour les distributions tempérées ; pour cela nous allons abandonner les notations $t \longleftrightarrow \nu$ au profit de notations « neutres » $x \longleftrightarrow y$; par ailleurs dans tout l'exercice nous noterons $\phi = \mathcal{F}\{\varphi\}$.

a) Il s'agit de relier la transformée de Fourier de la distribution T à celle de $e^{2i\pi y_0 x} T$. Mettons en œuvre les définitions relatives aux distributions

$$\langle \mathcal{F}\{e^{2i\pi y_0 x} T\}, \varphi \rangle = \langle e^{2i\pi y_0 x} T, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle = \langle e^{2i\pi y_0 x} T, \phi \rangle = \langle T, e^{2i\pi y_0 x} \phi \rangle$$

Utilisons la propriété de la transformée de Fourier des fonctions (voir table dans le chapitre 2) $\mathcal{F}\{\varphi_{-y_0}(y)\} = e^{2i\pi y_0 x} \phi(x)$ où $\varphi_{-y_0}(y) = \varphi(y+y_0)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \langle T, e^{2i\pi y_0 x} \phi \rangle &= \langle T, \mathcal{F}\{\varphi_{-y_0}\} \rangle = \langle \mathcal{F}\{T\}, \varphi_{-y_0} \rangle = \langle \mathcal{F}\{T\}_{y_0}, \varphi \rangle \\ \Rightarrow \mathcal{F}\{e^{2i\pi y_0 x} T\} &= \mathcal{F}\{T\}_{y_0} \end{aligned}$$

b) Il s'agit de relier la transformée de Fourier de la distribution T à celle de sa « décalée » T_a . On enchaîne les définitions

$$\langle \mathcal{F}\{T_a\}, \varphi \rangle = \langle T_a, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle = \langle T, \phi_{-a} \rangle$$

Chapitre 5 • Distributions

où $\phi_{-a}(y) = \phi(y+a)$. On utilise maintenant la propriété de la transformée de Fourier des fonctions $\phi(y+a) = \mathcal{F}\{e^{-2i\pi ax}\varphi\}$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\{T_a\}, \varphi \rangle &= \langle T, \mathcal{F}\{e^{-2i\pi ax}\varphi\} \rangle = \langle \mathcal{F}\{T\}, e^{-2i\pi ax}\varphi \rangle = \langle e^{-2i\pi ax}\mathcal{F}\{T\}, \varphi \rangle \\ &\Rightarrow \mathcal{F}\{T_a\} = e^{-2i\pi ax}\mathcal{F}\{T\}\end{aligned}$$

c) Même méthode

$$\langle \mathcal{F}\{T'\}, \varphi \rangle = \langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle$$

Utilisons la propriété : $\mathcal{F}\{tf(t)\} = -\frac{1}{2i\pi}\mathcal{F}\{f(t)\}' \Rightarrow -\phi' = \mathcal{F}\{2i\pi x\varphi(x)\}$; il vient

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\{T'\}, \varphi \rangle &= \langle T, \mathcal{F}\{2i\pi x\varphi\} \rangle = \langle \mathcal{F}\{T\}, 2i\pi x\varphi \rangle = \langle 2i\pi x\mathcal{F}\{T\}, \varphi \rangle \\ &\Rightarrow \mathcal{F}\{T'\} = 2i\pi x\mathcal{F}\{T\}\end{aligned}$$

d) Encore la même méthode

$$\langle \mathcal{F}\{xT\}, \varphi \rangle = \langle xT, \phi \rangle = \langle T, x\phi \rangle$$

Utilisons la propriété $\mathcal{F}\{f'(t)\} = 2i\pi\nu\mathcal{F}\{f(t)\} \Rightarrow x\phi(x) = \frac{1}{2i\pi}\mathcal{F}\{\varphi'(y)\}$; on déduit

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\{xT\}, \varphi \rangle &= \left\langle T, \frac{1}{2i\pi}\mathcal{F}\{\varphi'\} \right\rangle = \frac{1}{2i\pi}\langle \mathcal{F}\{T\}, \varphi' \rangle = -\frac{1}{2i\pi}\langle \mathcal{F}\{T\}', \varphi \rangle \\ &\Rightarrow \mathcal{F}\{xT\} = -\frac{1}{2i\pi}\mathcal{F}\{T\}'\end{aligned}$$

2 Établir que $\mathcal{F}\{[1]\} = \delta$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\{[1]\}, \varphi \rangle &= \langle [1], \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi xy} \phi(x) dx \Big|_{y=0} = \varphi(0) \\ &= \langle \delta, \varphi \rangle \Rightarrow \mathcal{F}\{[1]\} = \delta\end{aligned}$$

On en déduit (en utilisant le résultat de l'exercice 5.1 **3 b**))

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{[t]\} &= \mathcal{F}\{t[1]\} = -\frac{1}{2i\pi}\mathcal{F}\{[1]\}' = -\frac{1}{2i\pi}\delta' \\ \mathcal{F}\{[e^{2i\pi\nu_0 t}]\} &= \mathcal{F}\{e^{2i\pi\nu_0 t}[1]\} = \mathcal{F}\{[1]\}_{\nu_0} = \delta_{\nu_0}\end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Les distributions **tempérées** sont conçues pour permettre de définir la transformation de Fourier et de généraliser son application au-delà des fonctions intégrables ou de carré intégrable. C'est ce que montre le résultat de **2**.

5.5 1 On prend la transformée de Fourier de l'équation

$$\text{Pf} \frac{1}{t^2} = - \left(\text{Pf} \frac{1}{t} \right)' \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{T} = -2i\pi\nu \{ -i\pi [\text{sign}] \} = -2\pi^2 [|\nu|]$$

où on a utilisé $\nu [\text{sign}] = [|\nu|]$ (voir exercice 5.1).

2 La distribution associée à la fonction $t \rightarrow tu(t)$ est $T = [tu] = t[u]$. En utilisant la propriété $\mathcal{F}\{tT\} = -\frac{1}{2i\pi} [\mathcal{F}\{T\}]'$ et la table on en déduit la transformée de Fourier recherchée

$$\mathcal{F}\{T\} = -\frac{1}{2i\pi} [\mathcal{F}(u)]' = -\frac{1}{2i\pi} \left\{ \frac{1}{2}\delta' - \frac{1}{2i\pi} \text{Pf} \frac{1}{t^2} \right\} = -\frac{1}{4i\pi} \delta' - \frac{1}{4\pi^2} \text{Pf} \frac{1}{t^2}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

On peut très facilement élargir la table des transformées de Fourier des distributions par une utilisation pertinente de diverses propriétés, à l'image de ce que nous avons vu au chapitre 2.

Corrigés des problèmes

Problème 5.1

1 On prend la transformée de Fourier de l'équation $[u]' = \delta$

$$(2i\pi\nu)U = [1]$$

On a montré dans l'exercice 5.1 que $t \text{Pf} \frac{1}{t} = [1]$. Donc $U = \frac{1}{2i\pi} \text{Pf} \frac{1}{\nu}$ est solution de l'équation ci-dessus. Par ailleurs, puisque $\nu\delta = 0$, on obtient la solution générale

$$U = \frac{1}{2i\pi} \text{Pf} \frac{1}{\nu} + a\delta$$

où a est une constante arbitraire.

2 Rappelons $\phi_0(t) = e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \phi_0(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$

$$\langle \mathcal{F}[u], \phi \rangle = \langle [u], \mathcal{F}(\phi) \rangle$$

$$\langle \mathcal{F}[u], \phi_0 \rangle = \left\langle \frac{1}{2i\pi} \text{Pf} \frac{1}{\nu} + a\delta, e^{-\pi\nu^2} \right\rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\nu|>\epsilon} \frac{e^{-\pi\nu^2}}{\nu} d\nu + a \langle \delta, e^{-\pi\nu^2} \rangle = a$$

où la première intégrale est nulle par (im)parité. D'autre part

$$\langle [u], \mathcal{F}(\phi_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(\nu) e^{-\pi\nu^2} d\nu = \int_0^{\infty} e^{-\pi\nu^2} d\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$$

Chapitre 5 • Distributions

On en déduit $a = \frac{1}{2}$ et

$$\mathcal{F}[u] = \frac{1}{2i\pi} \text{Pf} \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2} \delta$$

3 La fonction porte peut s'exprimer : $\Pi_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$. On écrit la même identité entre les distributions associées à ces fonctions

$$[\Pi_T] = [u]_{-T/2} - [u]_{T/2}$$

On prend la transformée de Fourier de cette équation ; en utilisant la propriété de la transformation d'une distribution décalée (voir exercice 5.4) on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{[\Pi_T]\} &= (e^{i\pi\nu T} - e^{-i\pi\nu T}) \mathcal{F}\{[u]\} = 2i \sin(\pi\nu T) \left[\frac{1}{2i\pi} \text{Pf} \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2} \delta \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi\nu T) \text{Pf} \frac{1}{\nu} \end{aligned}$$

puis que $\sin(\pi\nu T) \delta = 0$. Évaluons cette dernière distribution

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left\langle \sin(\pi\nu T) \text{Pf} \frac{1}{\nu}, \phi \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \left\langle \text{Pf} \frac{1}{\nu}, \sin(\pi\nu T) \phi \right\rangle = \frac{1}{\pi} P P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\nu T) \phi(\nu)}{\nu} d\nu \\ &= T \langle [\text{sinc}(\nu T)], \phi \rangle \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathcal{F}\{[\Pi_T]\} = T [\text{sinc}(\nu T)]$$

Comme les fonctions associées à ces distributions sont dans \mathcal{L}^2 on retrouve la même égalité entre les fonctions

$$\mathcal{F}\{\Pi_T\} = T \text{sinc}(\nu T)$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

La fonction de Heaviside est fondamentale notamment en traitement du signal. Ce n'est que dans le cadre de la théorie des distributions que l'on peut donner rigoureusement un sens à sa transformée de Fourier, comme on peut le vérifier par la présence d'un δ dans cette transformée.

Problème 5.2

1 Si T est une distribution régulière associée à une fonction tempérée f ,

$$\begin{aligned} T * \varphi &= \langle T, \phi_{y-} \rangle = \langle [f], \phi_{y-} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(y-x) dy \\ &= f * \varphi \end{aligned}$$

2 Application : Relation de Kramers-Kronig.

a) On prend la transformée de Fourier de l'identité $\varphi = \varphi.u$ qui traduit la causalité de ϕ

$$\varphi = \varphi.u \rightarrow \mathcal{F}\{\varphi\} = \mathcal{F}\{\varphi.u\} \Rightarrow \phi = \phi * \mathcal{F}\{u\}$$

$$\phi = \phi * \left[\frac{1}{2i\pi} \text{Pf} \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2} \delta \right] = \frac{1}{2i\pi} \phi * \text{Pf} \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2} \phi \quad (\text{puisque } \phi * \delta = \phi)$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{i\pi} \phi * \text{Pf} \frac{1}{\nu} \Rightarrow \phi(\nu) = \frac{1}{i\pi} P P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu'$$

b) Les relations de Kramers-Kronig s'obtiennent à partir de cette dernière équation en exprimant ϕ en termes de parties réelle et imaginaire et en identifiant :

$$\phi(\nu) = A(\nu) + iB(\nu) = \frac{1}{i\pi} P P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\nu') + iB(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu'$$

$$A(\nu) = \frac{1}{\pi} P P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu'$$

$$B(\nu) = -\frac{1}{\pi} P P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu'$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

L'intérêt du calcul au sens des distributions apparaît dans ce problème où les relations de Kramers-Kronig sont obtenues très simplement. Nous verrons dans le chapitre suivant une méthode un peu plus longue en utilisant l'intégration dans le plan complexe. Notons que les intégrales qui apparaissent dans ces relations sont les *transformées de Hilbert* des fonctions B et A (voir commentaire du corrigé de l'exercice 5.3) ; les relations de Kramers-Kronig peuvent donc s'exprimer en disant que la fonction A est la transformée de Hilbert de B et B la transformée de Hilbert de $-A$.

Problème 5.3

Les fonctions e_n de \mathbb{R} dans \mathbb{C} sont définies par

$$t \mapsto e_n(t) = e^{-2i\pi nt} \quad n \in \mathbb{Z}$$

et $[e_n]$ est la distribution tempérée associée à la fonction e_n .

1 Appliquons la définition de la convergence d'une série dans \mathcal{S}' : calculons $\langle [e_n], \phi \rangle$

$$\langle [e_n], \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi nt} \phi(t) dt = \psi(n)$$

où $\psi = \mathcal{F}(\phi)$; on sait que si $\phi \in \mathcal{S} \Rightarrow \psi \in \mathcal{S}$ donc $\psi(n)$ est à décroissance rapide pour n grand et la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n)$ converge (voir exercice 5.1 **4**). Donc la série de terme général $[e_n]$ est convergente dans \mathcal{S}' .

Chapitre 5 • Distributions

2 On désigne par $T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [e_n]$; par définition $\langle T, \phi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle [e_n], \phi \rangle$.

a) On calcule $e_1 T$:

$$\begin{aligned} \langle e_1 T, \phi \rangle &= \langle T, e_1 \phi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi n t} e^{-2i\pi t} \phi(t) dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle [e_{n+1}], \phi \rangle = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \langle [e_{n'}], \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle \end{aligned}$$

On en déduit bien $e_1 T = T$.

b) Soit T_1 désigne la distribution T décalée de 1.

$$\begin{aligned} \langle T_1, \phi \rangle &= \langle T, \phi_{-1} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi n t} \phi(t+1) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi n(t'-1)} \phi(t') dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi n t'} \phi(t') dt = \langle T, \phi \rangle \end{aligned}$$

ce qui entraîne $T_1 = T$ c'est-à-dire que la distribution T est périodique de période 1.

c) En utilisant le résultat de l'exercice 5.1 on déduit de la relation établie à la question **2 a)** :

$$e_1 T = T \Leftrightarrow (e_1 - 1)T = 0 \Rightarrow T = \sum_n a_n \delta_{t_n}$$

où les t_k sont les zéros de la fonction $e_1 - 1 \Rightarrow e^{-2i\pi t} - 1 = 0 \Rightarrow t_n = n \in \mathbb{Z}$. De la condition établie à la question **2 b)** on tire :

$$\begin{aligned} T &= T_1 \Rightarrow \sum_n a_n \delta_n = \sum_n a_n \delta_{n+1} \Rightarrow a_n = a_{n+1} \forall n \\ a_n &= a \forall n \Rightarrow T = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n \end{aligned}$$

d) Ce résultat permet d'exprimer $\langle T, \phi_0 \rangle$ de deux façons différentes :

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [e_n] \Rightarrow \langle T, \phi_0 \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle [e_n], \phi_0 \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi n t} e^{-\pi t^2} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2}$$

où on a utilisé $\mathcal{F} \left\{ e^{-\pi t^2} \right\} = e^{-\pi v^2}$.

$$T = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n \Rightarrow \langle T, \phi_0 \rangle = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \delta_n, \phi_0 \rangle = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_0(n) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2}$$

On en déduit

$$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [e_n] = \text{III}$$

3 Écrivons la transformée de Fourier du peigne de Dirac :

$$\mathcal{F}\{\text{III}\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}\{\delta_n\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [e_n]$$

En injectant le résultat de la question précédente on a

$$\mathcal{F}\{\text{III}\} = \text{III}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Première démonstration de ce résultat très utile en traitement numérique du signal qui établit que le peigne de Dirac est invariant par transformation de Fourier.

Problème 5.4

1 Calculons

$$\langle [f], \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nt} \right\} \phi(t)dt$$

La fonction f est continue, périodique de période 1, donc sa série de Fourier converge uniformément sur \mathbb{R} . Si on permute l'intégrale sur t et la somme sur n on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi nt} \phi(t) dt$$

avec $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi nt} \phi(t)dt = \psi(2\pi n)$ où $\psi = \mathcal{F}\{\phi\}$ est à décroissance rapide. Donc cette série est convergente.

$$\langle [f], \phi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi nt} \phi(t)dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \langle [e_n], \phi \rangle = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n [e_n], \phi \right\rangle$$

où, dans la dernière égalité, on a utilisé la définition d'une série dans \mathcal{S}' . On a donc

$$[f] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n [e_n]$$

2 On prend maintenant la transformée de Fourier de cette identité

$$\mathcal{F}\{[f]\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \mathcal{F}\{[e_n]\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_n$$

3 Soit ϕ une fonction de support $[0, 1]$, continue sur $]0, 1[$, qui satisfait $\phi(0) = \phi(1)$ et qui coïncide avec f sur cet intervalle.

a) La fonction

$$\text{III} * \phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(t - n)$$

est en fait la répétition périodique de période 1 du motif ϕ défini sur l'intervalle $[0, 1]$; il s'agit bien de la fonction f .

b) La fonction f n'admet pas de transformée de Fourier. Cependant, si on prend la transformée de Fourier du produit de convolution qui la définit et qu'on applique la règle de factorisation, on obtient un résultat qui est une distribution. On va chercher à l'identifier à la transformée de Fourier de la *distribution* $[f]$:

$$\mathcal{F}\{\text{III}\} \mathcal{F}\{\phi\} = \text{III} \psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(n) \delta_n$$

où on a utilisé $\mathcal{F}\{\text{III}\} = \text{III}$. Dans cette équation ψ est la transformée de Fourier de ϕ et

$$\psi(n) = \mathcal{F}\{\phi(t)\}|_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi nt} \phi(t) dt = \int_0^1 e^{-2i\pi nt} \phi(t) dt$$

Mais sur l'intervalle $[0, 1]$ ϕ coïncide avec f donc $\psi(n) = c_n$. On retrouve le résultat de la première question ce qui permet de conclure

$$\begin{aligned} f = \text{III} * \phi &\Rightarrow \mathcal{F}\{\text{III} * \phi\} \text{ n'existe pas mais :} \\ \mathcal{F}\{\text{III}\} \mathcal{F}\{\phi\} &= \mathcal{F}\{[f]\} \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Ce problème montre que le spectre d'une fonction périodique est une superposition de distributions de Dirac pondérées par les coefficients de Fourier de la fonction. Ce résultat est largement utilisé en traitement du signal. **2** met en évidence la difficulté d'utilisation de la règle de factorisation du produit de convolution par la transformation de Fourier : $T * \phi$ est une fonction, donc $\mathcal{F}\{T * \phi\}$ aussi (si elle existe) mais $\mathcal{F}\{T\} \mathcal{F}\{\phi\}$ est une distribution.

Problème 5.5

1 Le coefficient de Fourier complexe de la fonction $g(t)$ est donné par

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-t^2 + tT - \frac{T^2}{6} \right) e^{-in\omega t} dt$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En intégrant deux fois par parties on obtient

$$c_n = -\frac{2}{n^2 \omega^2} \quad n \neq 0 \quad ; \quad \text{pour } n = 0 \text{ on trouve } c_0 = 0$$

2 Les séries

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-in\omega) c_n [e_n] = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{2i}{n\omega} [e_n] = G_1 \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-in\omega)^2 c_n [e_n] = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} [e_n] = G_2$$

sont convergentes dans \mathcal{S}' ; démontrons-le pour la première : il suffit de montrer que la série numérique de terme général $\left\langle \frac{2i}{n\omega} [e_n], \phi \right\rangle$ est convergente $\forall \phi$.

$$\left\langle \frac{2i}{n\omega} [e_n], \phi \right\rangle = \frac{2i}{n\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} \phi(t) dt = \frac{2i}{n\omega} \psi \left(n \frac{\omega}{2\pi} \right)$$

où $\psi = \mathcal{F}\{\phi\}$. Suivons le même raisonnement que dans le problème précédent : puisque ϕ est à décroissance rapide, il en est de même de sa transformée de Fourier ; donc $\left| \frac{2i}{n\omega} \psi \left(n \frac{\omega}{2\pi} \right) \right|$ décroît rapidement avec n ce qui assure la convergence de la série.

Montrons que $G_1 = [g]'$

$$\begin{aligned} \langle [g]', \phi \rangle &= - \langle [g], \phi' \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{2}{n^2 \omega^2} \langle [e_n], \phi' \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{2}{n^2 \omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} \phi'(t) dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{2}{n^2 \omega^2} \left\{ e^{-in\omega t} \phi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + in\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} \phi(t) dt \right\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{2i}{n\omega} \langle [e_n], \phi \rangle \\ &= \langle G_1, \phi \rangle \end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned} \langle [g]'', \phi \rangle &= \langle G_1', \phi \rangle = - \langle G_1, \phi' \rangle = - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{2i}{n\omega} \langle [e_n], \phi' \rangle = - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{2i}{n\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} \phi'(t) dt \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{2i}{n\omega} \left\{ in\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} \phi(t) dt \right\} \\ &= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \langle [e_n], \phi \rangle = \langle G_2, \phi \rangle \end{aligned}$$

3 La fonction g est continue, donc $[g]' = [g']$ où

$$g'(t) = -2t + T \quad \text{pour } t \in]0, T[\text{ et de période } T$$

(voir figure 5.1).

Cette fonction a des discontinuités de première espèce de saut $2T$ pour $t = kT$ où $k \in \mathbb{Z}$. Pour calculer $[g]''$ on utilise $[f]' = [f'_c] + \sigma_{t_0} \delta_{t_0}$ où $[f'_c]$ qui est ici la dérivée de g' au sens des fonctions vaut -2

$$[g]'' = [g']' = -2 + 2T \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT} = -2 + 2T \text{III}_T$$

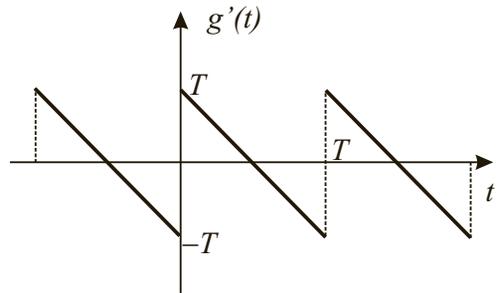


Figure 5.1

Chapitre 5 • Distributions

Par ailleurs

$$[g]'' = G_2 = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} [e_n] = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} [e_n] - 2$$

On en déduit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} [e_n] = T \text{III}_T$$

4 Écrivons la transformée de Fourier du peigne de Dirac :

$$\mathcal{F}(\text{III}_\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\delta_{n\tau}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [e^{-2i\pi n\tau t}]$$

On reconnaît dans la somme la fonction $e_n(t)$ dans laquelle $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a été remplacé par $2\pi\tau$ c'est-à-dire T a été remplacé par $\frac{1}{\tau}$. Compte tenu du résultat des questions précédentes on en déduit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} [e^{-2i\pi n\tau t}] = \frac{1}{\tau} \text{III}_{\frac{1}{\tau}}$$

et donc

$$\mathcal{F}(\text{III}_\tau) = \frac{1}{\tau} \text{III}_{\frac{1}{\tau}}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Autre méthode pour obtenir la transformée de Fourier du peigne de Dirac, de période τ cette fois-ci, qui repose sur la dérivation d'une série de Fourier au sens des distributions. Bien sûr, en faisant $\tau = 1$ on retrouve le résultat du problème 5.3.

Problème 5.6

1 On désigne par $T = [\ln |t|]$ la distribution associée à la fonction logarithme et par $\widehat{T} = \mathcal{F}\{T\}$ sa transformée de Fourier.

a) Évaluons $\left\langle \text{Pf} \frac{1}{|t|}, \phi_0 \right\rangle$:

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Pf} \frac{1}{|t|}, \phi_0 \right\rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^{-\pi t^2}}{|t|} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-\pi t^2}}{|t|} dt + 2 \ln \epsilon \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ 2 \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-\pi t^2}}{t} dt + 2 \ln \epsilon \right\} \end{aligned}$$

On intègre par parties

$$\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-\pi t^2}}{t} dt = \ln t e^{-\pi t^2} \Big|_{\epsilon}^{\infty} + 2\pi \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-\pi t^2} t \ln t dt = -\ln \epsilon + 2\pi I_1$$

L'intégrale I_1 correspond à celle calculée dans l'exercice 1.10 avec $a = \pi$ et vaut

$$I_1 = \int_0^{\infty} t \ln(t) e^{-\pi t^2} dt = -\frac{1}{4\pi} [\gamma + \ln(\pi)]$$

On en déduit

$$\left\langle \text{Pf} \frac{1}{|t|}, \phi_0 \right\rangle = 4\pi I_1 = -\gamma - \ln(\pi)$$

b) Évaluons $t \text{Pf} \frac{1}{|t|}$:

$$\begin{aligned} \left\langle t \text{Pf} \frac{1}{|t|}, \phi \right\rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{t\phi(t)}{|t|} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{t\phi(t)}{|t|} dt + 2 t\phi(t)|_{t=0} \ln \epsilon \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(t)\phi(t) dt = \langle [\text{sign}], \phi \rangle \Rightarrow t \text{Pf} \frac{1}{|t|} = [\text{sign}] \end{aligned}$$

2 On prend la transformée de Fourier de l'équation $T' = \text{Pf} \frac{1}{t}$:

$$\begin{aligned} 2i\pi\nu\widehat{T} &= -i\pi [\text{sign}] \Rightarrow \nu\widehat{T} = -\frac{1}{2} [\text{sign}] \\ \Rightarrow \widehat{T} &= -\frac{1}{2} \text{Pf} \frac{1}{|\nu|} + \alpha\delta \end{aligned}$$

où on a utilisé le résultat de 1 (b) et α est une constante arbitraire.

3 Pour déterminer α on utilise $\langle \mathcal{F}\{T\}, \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\{\phi\} \rangle$ ce qui nous donne deux façons de calculer le même nombre. Par ailleurs $\mathcal{F}\{\phi_0\} = \phi_0$.

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T}, \phi_0 \rangle &= \left\langle -\frac{1}{2} \text{Pf} \frac{1}{|\nu|} + \alpha\delta, \phi_0 \right\rangle = -\frac{1}{2} [-\gamma - \ln(\pi)] + \alpha \\ \langle T, \mathcal{F}\{\phi_0\} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \ln |t| e^{-\pi t^2} dt = 2I_0 = -\frac{1}{2} [\gamma + \ln(4\pi)] \end{aligned}$$

où on a exploité le résultat de l'exercice 1.10

$$I_0 = \int_0^{\infty} \ln |t| e^{-\pi t^2} dt = -\frac{1}{4} [\gamma + \ln(4\pi)]$$

On obtient finalement $\alpha = -\gamma - \ln(2\pi)$ et donc

$$\mathcal{F}\{[\ln |t|]\} = -\frac{1}{2} \text{Pf} \frac{1}{|\nu|} - [\gamma + \ln(2\pi)] \delta$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

À l'instar de la fonction échelon, la théorie des distributions permet de définir la transformée de Fourier de fonctions comme le logarithme, pour lesquelles l'intégrale de Fourier n'a pas de sens.

6

FILTRES ET CAUSALITÉ

Les problèmes de ce chapitre s'appuient sur les résultats de la transformée de Fourier (chapitre 2), de la transformée de Laplace (chapitre 3), de l'intégration complexe (chapitre 4) et de la théorie des distributions (chapitre 5).

RAPPELS DE COURS

Un filtre est un système linéaire stationnaire. Il donne d'un signal d'entrée e une réponse $s = h * e$ où $*$ désigne le produit de convolution ; h est la *réponse impulsionnelle*, caractéristique du filtre, qui peut être une fonction (c'est le cas envisagé dans ce chapitre) ou une distribution tempérée (voir chapitre 5).

Si un filtre est causal et stable sa *réponse impulsionnelle* $h(t)$ doit satisfaire les propriétés :

- h est une fonction causale : $h(t) = 0 \quad \forall t < 0 \Leftrightarrow h(t) = u(t)h(t) \quad \forall t$ où $u(t)$ est l'échelon de Heaviside.
- h est une fonction sommable ($\in \mathcal{L}^1$).

Définition

On définit

- la *fonction de transfert* $H(p) = \mathcal{L}\{h\}$ où \mathcal{L} désigne la transformation de Laplace ;
- le *gain complexe* $G(\nu) = \mathcal{F}\{h\}$ où \mathcal{F} désigne la transformation de Fourier ;
 $G(\nu) = C(\nu)e^{i\phi(\nu)}$ où $C(\nu) = |G(\nu)|$ est le *gain en fréquence* et $\phi(\nu)$ la *phase*.

Dans le cas d'un filtre causal et stable (filtre physiquement réalisable) la fonction de transfert $H(p)$ est analytique dans le demi-plan $\text{Re } p > 0$ et elle est définie pour $\text{Re } p = 0$ où elle est reliée au gain complexe par la relation : $G(\nu) = H(2i\pi\nu)$ (problème 6.3).

ÉNONCÉS DES PROBLÈMES

Problème 6.1 Filtrage

On envoie un signal T -périodique $x(t)$ dans un filtre fréquentiel de gain complexe G . On note $\nu_0 = 1/T$ la fréquence fondamentale du signal qu'on représente par sa série de Fourier :

$$x(t) = \sum_n c_n e^{2i\pi n \frac{t}{T}}$$

1 Montrer que le signal de sortie est de la forme

$$y(t) = \sum_n c_n G(n\nu_0) e^{2i\pi n \frac{t}{T}}$$

2 Application : le signal d'entrée T -périodique est donné par $x(t) = E$ pour $0 \leq t < T/2$ et $x(t) = -E$ pour $T/2 \leq t < T$ et le gain du filtre par $G(\nu) = \frac{1}{1 + \nu/\nu_c}$ où ν_c est une fréquence caractéristique.

a) Écrire la série de Fourier du signal de sortie y .

b) On prend $\nu_c = 2\nu_0$. Calculer $\left| \frac{y_n}{y_1} \right|$ pour $n \geq 2$ où y_n désigne les coefficients de Fourier de y .
Quelle peut être l'utilité d'un tel système ?

Problème 6.2 Systèmes d'ordre demi-entier

1 *Préliminaire*

On rappelle la définition de la fonction d'erreur complémentaire :

$$\operatorname{Erfc}(t) = 1 - \operatorname{Erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2} du.$$

Calculer la transformée de Laplace $\mathcal{L} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t \operatorname{Erfc}(\sqrt{t}) \right) u(t) \right\}$.

2 *Systèmes d'ordre non entier*

On rappelle la propriété de la transformation de Laplace pour une fonction f de classe C^n et de transformée $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

$$\mathcal{L}^{-1}[p^n F(p)] = \frac{d^n f}{dt^n}$$

Par extension, on définit, pour $\alpha \in]0, 1[$, la *dérivée non entière d'ordre α* d'une fonction f causale *continue* de dérivée f' de classe \mathcal{L} par :

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{L}^{-1}[p^\alpha F(p)] \quad \alpha \in]0, 1[$$

a) Calculer $\frac{d^\alpha [t^\lambda u(t)]}{dt^\alpha}$, $\lambda > 0$. Vérifier que le résultat obtenu interpole bien la dérivée d'ordre entier.

b) Montrer que :

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

c) Un système est dit d'ordre $\frac{1}{2}$ si pour un signal d'entrée $e(t)$, le signal de sortie $s(t)$ satisfait, pour $t > 0$, l'équation :

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} s(t)}{dt^{\frac{1}{2}}} + s(t) = e(t)$$

avec $s(0^+) = 0$. On désigne par $E(p)$ et $S(p)$ les transformées de Laplace de $e(t)$ et $s(t)$ respectivement, et par $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$, la fonction de transfert du système.

Déterminer $H(p)$.

d) À l'aide du résultat du préliminaire, déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système d'ordre $\frac{1}{2}$.

Problème 6.3 Relations de causalité

1 La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un filtre causal stable est une fonction causale et intégrable.

a) Montrer que sa fonction de transfert $H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ est analytique dans le demi-plan $\text{Re } p > 0$ et qu'elle est définie pour $\text{Re } p = 0$.

b) Montrer que $G(\nu) = H(2i\pi\nu)$ où G désigne le gain complexe du filtre.

2 On désigne par A et B respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de G : $A(\nu) = \text{Re } G(\nu)$, $B(\nu) = \text{Im } G(\nu)$

Nous allons établir des relations entre A et B qui traduisent dans le domaine fréquentiel la propriété temporelle de causalité de h .

a) En intégrant la fonction $\frac{H(p)}{p - i\omega_0}$ ($\omega_0 \in \mathbb{R}$) sur le contour Γ ci-contre (figure 6.1) établir que

$$PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\nu)}{\nu - \nu_0} d\nu = -i\pi G(\nu_0)$$

où $G(\nu) = H(2i\pi\nu)$, $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et la partie principale est à prendre à l'infini et en ν_0 :

$$PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\nu)}{\nu - \nu_0} d\nu = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left\{ \int_{-R}^{\nu_0 - \epsilon} \frac{G(\nu)}{\nu - \nu_0} d\nu + \int_{\nu_0 + \epsilon}^R \frac{G(\nu)}{\nu - \nu_0} d\nu \right\}$$

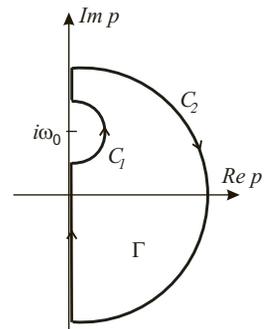


Figure 6.1

b) En déduire ensuite les relations de Kramers-Kronig :

$$B(\nu) = \frac{1}{\pi} P P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\nu')}{\nu' - \nu} d\nu'$$

$$A(\nu) = -\frac{1}{\pi} P P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\nu')}{\nu' - \nu} d\nu'$$

3 Relations *soustraites* :

a) Montrer que si la fonction h est réelle $A(\nu) = A(-\nu)$, $B(\nu) = -B(-\nu)$.

b) Montrer que

$$P P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu' - \nu} d\nu' = 0$$

c) Déduire de ces deux questions les relations de Kramers-Kronig soustraites qui ne mettent en jeu que la partie physique du spectre :

$$B(\nu) = \frac{2\nu}{\pi} P P \int_0^{\infty} \frac{A(\nu') - A(\nu)}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu'$$

$$A(\nu) = -\frac{2}{\pi} P P \int_0^{\infty} \frac{\nu' B(\nu') - \nu B(\nu)}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu'$$

Problème 6.4 Filtre à phase minimale - Relations de Bayard-Bode

On considère de nouveau un filtre causal stable de fonction de transfert $H(p)$ analytique dans le demi plan $P^+ : \{p \mid \operatorname{Re} p > 0\}$ et reliée sur l'axe imaginaire $\operatorname{Re} p = 0$ au gain complexe $H(2i\pi\nu) = G(\nu) = C(\nu)e^{i\phi(\nu)}$ où $C(\nu) = |G(\nu)|$ est le gain en fréquence et $\phi(\nu)$ la phase.

Supposons que H possède un unique zéro simple dans P^+ noté p_1 . On définit

$$Z_1(p) = \frac{p - p_1}{p + \overline{p_1}}$$

où $\overline{p_1}$ désigne le complexe conjugué de p_1 .

1 Montrer que $|Z_1(2i\pi\nu)| = 1$. Justifier que le filtre dont Z_1 est la fonction de transfert soit dénommé *passé-tout*.

2 On pose $\alpha_1(\nu) = \operatorname{Arg} Z_1(p = 2i\pi\nu)$. Montrer (par exemple à l'aide d'arguments géométriques) que la phase $\alpha_1(\nu)$ est monotone décroissante de 2π à 0 quand ν varie de $-\infty$ à $+\infty$.

3 On construit la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{H(p)}{Z_1(p)}$.

a) Montrer que dans P^+ cette fonction est analytique et n'a pas de zéro.

b) Montrer que le filtre de gain complexe $G_m(\nu) = H_m(2i\pi\nu)$ a même gain en fréquence que le filtre de gain $G(\nu) = H(2i\pi\nu)$ mais avec une phase plus petite.

4 On suppose maintenant que H possède N zéros dans P^+ notés p_1, p_2, \dots, p_N et on définit

$$Z_N(p) = \prod_{k=1}^N \frac{p - p_k}{p + \overline{p_k}}$$

a) En étendant le résultat de **3** montrer que la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{H(p)}{Z_N(p)}$ est analytique et n'a pas de zéro dans P^+ . Montrer de plus que le filtre de gain complexe $G_m(\nu) = H_m(2i\pi\nu)$ a même gain en fréquence $C(\nu)$ que le filtre de gain $G(\nu) = H(2i\pi\nu)$; justifier le nom de filtre à minimum de phase donné à un tel filtre.

5 Soit H_m la fonction de transfert d'un filtre à minimum de phase. On définit $F(p) = \log H_m(p)$.

a) Montrer que $F(p)$ est analytique dans P^+ .

b) En appliquant les relations de Kramers-Kronig (problème 6.3) à cette fonction, établir les relations de Bayard-Bode

$$\begin{aligned} \phi(\nu) &= \frac{2\nu}{\pi} P P \int_0^\infty \frac{\ln C(\nu') - \ln C(\nu)}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu' \\ \ln C(\nu) &= -\frac{2}{\pi} P P \int_0^\infty \frac{\nu' \phi(\nu') - \nu \phi(\nu)}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu' \end{aligned}$$

où C et ϕ sont respectivement le gain en fréquence et la phase du filtre à phase minimale.

Problème 6.5 Critère de causalité de Paley-Wiener

Dans ce problème, on se conformera à l'usage en utilisant comme variable spectrale la *pulsation* ω plutôt que la fréquence ν . Le gain complexe est alors défini par $G(\omega)$, transformée de Fourier en pulsation de la réponse impulsionnelle.

Pour être *réalisable*, un filtre doit être causal et stable; sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est donc une fonction causale et intégrable. Sa fonction de transfert $H(p)$ satisfait donc les conditions :

- condition C1 : $H(p)$ est une fonction analytique dans le demi-plan $P^+ : \{p | \text{Re } p > 0\}$
- condition C2 : $H(p)$ satisfait dans $P^+ \lim_{|p| \rightarrow \infty} |H(p)| = 0$.

Les filtres fréquentiels sont construits à partir de leur gain en fréquence $|G(\omega)|$. Nous avons vu (problème 6.3) que pour un filtre causal et stable le gain complexe est relié à la fonction de transfert par $H(p = i\omega) = G(\omega)$.

La question de la *réalisabilité* se pose donc dans les termes suivants :

Etant donné $|G(\omega)|$ existe-t-il une fonction $H(p)$ satisfaisant les conditions C1 et C2 ci-dessus et telle que $|H(i\omega)| = |G(\omega)|$?

En terme des fonctions d'une variable complexe ce problème se reformule de la façon suivante : peut-on construire une fonction (la fonction de transfert $H(p)$), analytique et de module borné dans un domaine (le domaine P^+), connaissant le module de cette fonction sur un bord du domaine (ici $|H(i\omega)| = |G(\omega)|$ sur l'axe imaginaire $p = i\omega$) ?

La réponse est donnée par le critère de Paley-Wiener : le filtre de gain en fréquence $C(\omega) = |G(\omega)|$ est réalisable si et seulement si

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{|\ln C(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega \text{ est bornée} \tag{6.1}$$

Nous allons établir que cette condition est suffisante[7].

- 1 On définit la fonction 2π -périodique $r(\theta) = \ln \left[C(\tan \frac{\theta}{2}) \right]$. Montrer que la condition (6.1) devient

$$\int_{-\pi}^{\pi} |r(\theta)| d\theta \text{ est bornée}$$

- 2 Cette condition entraîne que r est développable en série de Fourier :

$$r(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n e^{-in\theta} \quad \text{avec} \quad r_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r(\theta) e^{in\theta} d\theta$$

On définit la fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} : $Y(z) = r_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{z^n}$.

a) Montrer que $Y(z)$ est analytique pour $|z| > 1$.

b) Montrer que $\operatorname{Re} Y(e^{i\theta}) = r(\theta)$.

- 3 On effectue la transformation

$$z = \frac{1+p}{1-p}$$

a) Dans cette transformation quelle est l'image \mathcal{D} du codisque $|z| \geq 1$?

b) Justifier que $c(p) = Y(\frac{1+p}{1-p})$ est analytique dans \mathcal{D} .

- 4 On définit $H(p) = \exp(c(p))$. Montrer que $|H(i\omega)| = C(\omega)$; que conclure ?

DU MAL À DÉMARRER ?

Problème 6.1

1 Pour évaluer l'intégrale de convolution on peut soit utiliser la transformation de Fourier et les distributions, soit réaliser un calcul direct.

Problème 6.2

Simplifier au maximum l'expression de la transformée de Laplace du préliminaire.

2 Être attentif aux conditions d'existence des transformées mises en jeu.

Problème 6.3

1 Pour montrer l'analyticité de $H(p)$ utiliser les conditions de Cauchy.

2 Pour calculer les intégrales complexes sur les cercles C_1 et C_2 utiliser les lemmes de Jordan.

Problème 6.4

2 Poser $2i\pi\nu - p_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $2i\pi\nu + \bar{p}_1 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ et chercher l'interprétation géométrique des angles θ_1 et θ_2 ; on doit trouver que $\alpha_1(\nu) = \theta_1 - \theta_2$.

5 $\log Z(z)$ est analytique dans tout domaine d'analyticité de $Z(z)$ ne contenant pas de zéro de $Z(z)$ (qui sont les points critiques du logarithme complexe).

Problème 6.5

2 On rappelle que la somme d'une série de Laurent est une fonction analytique dans la couronne de convergence de la série.

4 Il faut enchaîner les différentes fonctions définies et voir que $p = i\omega \Leftrightarrow z = e^{i\theta}$ avec $\omega = \tan \frac{\theta}{2}$.

Corrigés des problèmes

Problème 6.1

Le signal d'entrée T -périodique $x(t)$ est représenté par sa série de Fourier

$$x(t) = \sum_n c_n e^{2i\pi n\nu_0 t}$$

où $\nu_0 = 1/T$.

1 Le signal de sortie est donné par

$$y = h * x \Rightarrow Y(\nu) = G(\nu) X(\nu)$$

Le spectre de fréquence du signal $x(t)$ est donné par (voir problème 5.4)

$$X(\nu) = \sum_n c_n \delta_{n\nu_0}$$

Par ailleurs (voir chapitre 5) $G(\nu) \delta_{n\nu_0} = G(n\nu_0) \delta_{n\nu_0}$. On a donc

$$Y(\nu) = G(\nu) \sum_n c_n \delta_{n\nu_0} = \sum_n c_n G(n\nu_0) \delta_{n\nu_0} \Rightarrow y(t) = \sum_n c_n G(n\nu_0) e^{2i\pi n\nu_0 t}$$

Alternativement, ce résultat peut être obtenu en exprimant directement l'intégrale de convolution et en remplaçant le signal x par sa série de Fourier :

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \left[\sum_n c_n e^{2i\pi n\nu_0(t-t')} \right] dt' \\ &= \sum_n c_n e^{2i\pi n\nu_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(t') e^{-2i\pi n\nu_0 t'} dt' = \sum_n c_n G(n\nu_0) e^{2i\pi n\nu_0 t} \end{aligned}$$

2 Application : calculons la série de Fourier de x :

$$c_n = \left. \begin{aligned} &= \frac{E}{T} \int_0^{T/2} e^{-2i\pi n\nu_0 t} dt - \frac{E}{T} \int_{T/2}^T e^{-2i\pi n\nu_0 t} dt \\ &= 0 \text{ pour } n \text{ pair} \\ &= \frac{2E}{i\pi n} \text{ pour } n \text{ impair} \end{aligned} \right\} x(t) = \frac{2E}{i\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2k+1} e^{2i\pi(2k+1)\nu_0 t}$$

a) On en déduit

$$y(t) = \frac{2E}{i\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1) [1 + (2k+1)\nu_0/\nu_c]} e^{2i\pi(2k+1)\nu_0 t}$$

b) Pour $\nu_c = 2\nu_0$ on a

$$y_{2k+1} = \frac{2E}{i\pi} \frac{1}{(2k+1) [1 + (2k+1)/2]} \Rightarrow \left| \frac{y_{2k+1}}{y_1} \right| = \frac{3}{(2k+1)(2k+3)}$$

Ce rapport décroît vite quand k augmente. Les harmoniques d'ordre élevé (avec k grand), donc de fréquences grandes devant ν_0 , contribueront peu au signal de sortie. Ce filtre est donc passe-bas.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Ce problème standard balaye les diverses méthodes vues jusqu'ici : séries de Fourier, distributions, transformées de Fourier.

Problème 6.2

1 Préliminaire Calcul de $\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t \operatorname{Erc}(\sqrt{t}) \right\}$

Tout d'abord en utilisant la table on a directement $\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2)}{p^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{p}}$;

Soit $f(t) = \operatorname{Erfc}(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{t}}^{\infty} e^{-u^2} du$; on a donc $f(0) = 1$ et

$$f'(t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-t} = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-t}$$

Prenons la transformée de Laplace de cette égalité :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} \{ f'(t) \} &= pF(p) - f(0^+) = pF(p) - 1 \\ \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-t} u(t) \right\} &= \frac{1}{\sqrt{p+1}} \end{aligned} \right\} F(p) = \mathcal{L}[\operatorname{Erfc}(\sqrt{t})] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p\sqrt{p+1}}$$

où on a utilisé la propriété de la transformation de Laplace $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(p - a)$. En utilisant de nouveau la même propriété on obtient

$$\mathcal{L}\{e^t \operatorname{Erfc}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t \operatorname{Erfc}(\sqrt{t})\right\} &= \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}} = \frac{p-1-\sqrt{p}+1}{(p-1)\sqrt{p}} \\ &= \frac{\sqrt{p}-1}{(p-1)} = \frac{1}{\sqrt{p}+1} \end{aligned}$$

2 La dérivée non entière d'ordre α , pour $\alpha \in]0, 1[$, est définie par :

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \mathcal{L}^{-1}[p^\alpha F(p)] \quad \alpha \in]0, 1[$$

a) Appliquons cette définition à la fonction $t^\lambda u(t)$. Comme $\lambda > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$, $\lambda - \alpha + 1 > 0$; on peut donc écrire

$$\frac{d^\alpha [t^\lambda u(t)]}{dt^\alpha} = \mathcal{L}^{-1}\left[p^\alpha \frac{\Gamma(\lambda+1)}{p^{\lambda+1}}\right] = \Gamma(\lambda+1) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^{\lambda-\alpha+1}}\right] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha} u(t)$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\frac{d^n [t^\lambda u(t)]}{dt^n} = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) t^{\lambda-n} u(t) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)} t^{\lambda-n} u(t).$$

On obtient une expression analogue à celle de la dérivée non entière.

b) $\alpha \in]0, 1[$, donc $1 - \alpha > 0$; d'autre part f est continue donc $f(0^+) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} &= \mathcal{L}^{-1}[p^\alpha F(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^{1-\alpha}} (pF(p))\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^{1-\alpha}}\right\} * \mathcal{L}^{-1}[pF(p)] \\ &= \frac{t^{-\alpha} u(t)}{\Gamma(1-\alpha)} * f'(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \end{aligned}$$

c) Pour un système d'ordre $\frac{1}{2}$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} s(t)}{dt^{\frac{1}{2}}} + s(t) = e(t)$$

On prend la transformée de Laplace de cette équation

$$(\sqrt{p}+1) S(p) = E(p) \Rightarrow H(p) = \frac{1}{\sqrt{p}+1}$$

d) D'après le résultat du préliminaire on a

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{p+1}} \right\} = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t [1 - \operatorname{Erf}(\sqrt{t})] \right] u(t)$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Ce problème présente une utilisation originale de la transformation de Laplace à la définition de la dérivation d'ordre non entier. Ce concept a conduit à des applications sur la robustesse de systèmes asservis (*La dérivée non entière*, A. Oustaloup, Hermès 1995, *La commande CRONE*, A. Oustaloup, B. Mathieu, Hermès).

Problème 6.3

1 La réponse impulsionnelle est intégrable donc

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

a) La fonction de transfert $H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ est donnée par (en posant $p = \sigma + i\omega$)

$$\begin{aligned} H(p) &= \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} h(t)e^{-(\sigma+i\omega)t} dt \\ &= \int_0^{\infty} h(t)e^{-\sigma t} \cos(\omega t) dt - i \int_0^{\infty} h(t)e^{-\sigma t} \sin(\omega t) dt \\ &= P(\sigma, \omega) + iQ(\sigma, \omega) \end{aligned}$$

Pour $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ les intégrales

$$\int_0^{\infty} t h(t)e^{-\sigma t} \cos(\omega t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} t h(t)e^{-\sigma t} \sin(\omega t) dt$$

convergent uniformément $\forall \omega$. On peut donc vérifier les conditions de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} P(\sigma, \omega) &= - \int_0^{\infty} t h(t)e^{-\sigma t} \cos(\omega t) dt = \frac{\partial}{\partial \omega} Q(\sigma, \omega) \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} Q(\sigma, \omega) &= + \int_0^{\infty} t h(t)e^{-\sigma t} \sin(\omega t) dt = - \frac{\partial}{\partial \omega} P(\sigma, \omega) \end{aligned}$$

La fonction $H(p)$ est donc analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re} p > 0$. De plus pour $\operatorname{Re} p = \sigma = 0$

$$H(i\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt$$

qui est la transformée de Fourier (en pulsation) de h . Comme h est dans \mathcal{L}^1 sa transformée de Fourier est une fonction définie, continue, bornée pour tout ω .

b) Du résultat précédent il vient immédiatement

$$H(2i\pi\nu) = \int_0^\infty h(t)e^{-2i\pi\nu t} dt = G(\nu)$$

2 On pose : $G(\nu) = A(\nu) + iB(\nu)$.

a) La fonction $\frac{H(p)}{p - i\omega_0}$ est analytique dans le domaine délimité par $\Gamma \Rightarrow I_\Gamma = 0$.

Sur C_2 : $p = R e^{i\theta}$; on applique le lemme de Jordan :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left| \frac{H(R e^{i\theta})}{R e^{i\theta} - i\omega_0} \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{RM(R)}{R - \omega_0}$$

où $M(R)$ est le maximum de $|H(R e^{i\theta})|$ pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ (grand cercle dans le demi-plan $\text{Re } p \geq 0$). D'après les propriétés de la transformation de Laplace d'une fonction de classe \mathcal{L} (voir chapitre 3) ce maximum tend vers zéro quand R tend vers l'infini ; d'où $\lim_{R \rightarrow \infty} I_{C_2} = 0$.

À l'aide du troisième lemme de Jordan on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{C_1} = i\pi \text{Res}(\omega = \omega_0) = i\pi H(i\omega_0)$$

L'intégrale sur le contour Γ donne donc :

$$\int_\Gamma \frac{H(p)}{p - i\omega_0} dp = 0 = \int_{-R}^{\omega_0 - \epsilon} \frac{H(i\omega)}{i\omega - i\omega_0} i d\omega + \int_{\omega_0 + \epsilon}^R \frac{H(i\omega)}{i\omega - i\omega_0} i d\omega + I_{C_1} + I_{C_2}$$

et dans la limite $R \rightarrow \infty$ et $\epsilon \rightarrow 0$ on obtient

$$PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(i\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = -i\pi H(i\omega_0)$$

En posant $\omega = 2\pi\nu$ et $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ on obtient

$$PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\nu)}{\nu - \nu_0} d\nu = -i\pi G(\nu_0)$$

b) En identifiant parties réelle et imaginaire on obtient les relations de Kramers-Kronig :

$$\begin{aligned} B(\nu) &= \frac{1}{\pi} PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\nu')}{\nu' - \nu} d\nu' \\ A(\nu) &= -\frac{1}{\pi} PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\nu')}{\nu' - \nu} d\nu' \end{aligned}$$

où on a procédé au changement de notations : $\nu \rightarrow \nu'$; $\nu_0 \rightarrow \nu$

3 Relations *soustraites* :

a) Si la fonction h est réelle

$$A(\nu) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} h(t)e^{-2i\pi\nu t} dt = \int_0^{\infty} h(t) \cos(2\pi\nu t) dt$$

qui est une fonction paire en ν à travers le cosinus tandis que

$$B(\nu) = \operatorname{Im} \int_0^{\infty} h(t)e^{-2i\pi\nu t} dt = - \int_0^{\infty} h(t) \sin(2\pi\nu t) dt$$

est impaire à travers le sinus.

b) Détaillons l'intégrale en partie principale

$$\begin{aligned} PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu' - \nu} d\nu' &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{\nu - \epsilon} \frac{1}{\nu' - \nu} d\nu' + \int_{\nu + \epsilon}^R \frac{1}{\nu' - \nu} d\nu' \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \ln |\nu' - \nu|_{-R}^{\nu - \epsilon} + \ln |\nu' - \nu|_{\nu + \epsilon}^R \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \{ \ln \epsilon - \ln |R + \nu| + \ln |R - \nu| - \ln \epsilon \} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \ln \frac{|R - \nu|}{|R + \nu|} = 0 \end{aligned}$$

c) En ajoutant ce terme nul aux relations ci-dessus on obtient les relations de Kramers-Kronig :

$$\begin{aligned} B(\nu) &= \frac{1}{\pi} PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\nu')}{\nu' - \nu} d\nu' = \frac{1}{\pi} PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\nu')}{\nu' - \nu} d\nu' - A(\nu) \frac{1}{\pi} PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu' - \nu} d\nu' \\ &= \frac{1}{\pi} PP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\nu') - A(\nu)}{\nu' - \nu} d\nu' \end{aligned}$$

On partage l'intervalle d'intégration en deux parties et on utilise la parité de A :

$$\begin{aligned} B(\nu) &= \frac{1}{\pi} PP \int_{-\infty}^0 \frac{A(\nu') - A(\nu)}{\nu' - \nu} d\nu' + \frac{1}{\pi} PP \int_0^{\infty} \frac{A(\nu') - A(\nu)}{\nu' - \nu} d\nu' \\ &= \frac{1}{\pi} PP \int_0^{\infty} \frac{A(\nu') - A(\nu)}{-\nu' - \nu} d\nu' + \frac{1}{\pi} PP \int_0^{\infty} \frac{A(\nu') - A(\nu)}{\nu' - \nu} d\nu' \\ &= \frac{2\nu}{\pi} PP \int_0^{\infty} \frac{A(\nu') - A(\nu)}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu' \end{aligned}$$

Un calcul analogue utilisant la propriété d'imparité de $B(\nu)$ conduit à l'autre relation :

$$A(\nu) = -\frac{2}{\pi} PP \int_0^{\infty} \frac{\nu' B(\nu') - \nu B(\nu)}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu'$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Le problème de traduire dans le domaine fréquentiel la conséquence de la causalité a déjà été étudié dans le cadre de la théorie des distributions (problème 5.2). Ici les relations de Kramers-Kronig sont obtenues à partir des propriétés d'analyticité de la fonction de transfert.

Problème 6.4

Supposons que H possède un unique zéro simple dans P^+ noté p_1 . On définit $Z_1(p) = \frac{p - p_1}{p + \bar{p}_1}$

1 Pour $p = 2i\pi\nu$ on a $p - p_1 = 2i\pi\nu - p_1$ et $p + \bar{p}_1 = 2i\pi\nu + \bar{p}_1 = -\overline{(2i\pi\nu - p_1)}$. D'où

$$|Z_1(2i\pi\nu)| = \left| \frac{2i\pi\nu - p_1}{2i\pi\nu + \bar{p}_1} \right| = \left| \frac{2i\pi\nu - p_1}{-\overline{(2i\pi\nu - p_1)}} \right| = 1$$

Le gain en fréquence du filtre dont Z_1 est la fonction de transfert est donc « plat » ; il ne sélectionne aucune fréquence, d'où le nom de *passé-tout*.

2 Pour $p = 2i\pi\nu$ posons $2i\pi\nu - p_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $2i\pi\nu + \bar{p}_1 = \rho_2 e^{i\theta_2}$. On a $\rho_1 = \rho_2$ donc $Z_1(2i\pi\nu) = e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = e^{i\alpha_1(\nu)}$; le diagramme ci-contre (figure 6.2) donne une représentation de cet angle.

Pour $\nu \rightarrow -\infty$, $\theta_1 = \frac{3\pi}{2}$ et $\alpha_1(-\infty) = 2\pi$; quand ν croît de $-\infty$ à $+\infty$, θ_1 décroît de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ et donc $\alpha_1(\nu)$ décroît de 2π à 0.

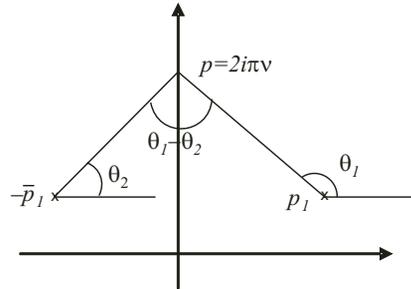


Figure 6.2

3 On définit $H_m(p) = \frac{H(p)}{Z_1(p)}$. Remarquons que le zéro de $H_m(p)$ en $p = -\bar{p}_1$ introduit par la fonction $\frac{1}{Z_1(p)}$ n'est pas dans P^+ .

a) $H(p)$ est analytique dans P^+ et possède un zéro simple en p_1 . Le développement de Taylor de $H(p)$ au voisinage de p_1 est de la forme

$$H(p) = (p - p_1)H'(p_1) + \frac{1}{2}(p - p_1)^2 H''(p_1) + \dots = (p - p_1)\tilde{H}(p)$$

où $\tilde{H}(p)$ est analytique et n'a pas de zéro dans P^+ . Donc $H_m(p) = \frac{H(p)}{Z_1(p)} = \tilde{H}(p)(p + \bar{p}_1)$ est analytique et n'a pas de zéro dans P^+ .

b) On a $G_m(\nu) = \frac{H(2i\pi\nu)}{Z_1(2i\pi\nu)}$; d'après **2**, $Z_1(2i\pi\nu) = e^{i\alpha_1(\nu)}$, donc

$$G_m(\nu) = \frac{H(2i\pi\nu)}{Z_1(2i\pi\nu)} = G(\nu)e^{-i\alpha_1(\nu)} = |G(\nu)| e^{i[\phi(\nu) - \alpha_1(\nu)]}$$

Nous avons établi que $\alpha_1(\nu) \in [0, 2\pi]$. Donc le filtre de gain complexe $G_m(\nu)$ a même gain en fréquence $C(\nu) = |G(\nu)|$ que le filtre de gain G mais avec une phase plus petite.

4 On suppose maintenant que H possède N zéros dans P^+ notés p_1, p_2, \dots, p_N et on définit

$$Z_N(p) = \prod_k \frac{p - p_k}{p + \overline{p_k}}$$

a) En étendant la démonstration de la question **3**, la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{H(p)}{Z_N(p)}$ est analytique et n'a pas de zéro dans P^+ ; de plus le filtre de gain complexe $G_m(\nu) = H_m(2i\pi\nu)$ a même gain en fréquence que le filtre de gain complexe G puisque $|Z_N(p = 2i\pi\nu)| = 1$. À chaque zéro p_k , la division par $Z_k(p) = \frac{p - p_k}{p + \overline{p_k}}$ entraîne une diminution de α_k de la phase globale de G ; d'où le nom.

5 Soit H_m la fonction de transfert d'un filtre à minimum de phase. On définit $F(p) = \log H_m(p)$.

a) La fonction $H_m(p)$ n'a aucun zéro dans P^+ ; la fonction $F(p)$ n'a donc aucun point critique dans ce domaine. On peut donc choisir de placer les coupures dans P^- de sorte que la fonction $F(p)$ soit analytique dans P^+ .

b) On a $F(2i\pi\nu) = \log H_m(2i\pi\nu) = \ln C(\nu) + i\phi(\nu)$. En identifiant $A(\nu) = \ln C(\nu)$ et $B(\nu) = \phi(\nu)$ et en appliquant les relations de Kramers-Kronig (problème 6.3) on obtient les relations de Bayard-Bode

$$\begin{aligned} \phi(\nu) &= \frac{2\nu}{\pi} P P \int_0^\infty \frac{\ln C(\nu') - \ln C(\nu)}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu' \\ \ln C(\nu) &= -\frac{2}{\pi} P P \int_0^\infty \frac{\nu' \phi(\nu') - \nu \phi(\nu)}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu' \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

On a défini la notion importante de filtre à phase minimale et on a justifié son nom à partir des propriétés de la fonction de transfert dans le plan complexe.

Problème 6.5

Nous allons établir que la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln C(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega \text{ est bornée}$$

est suffisante pour qu'il existe $H(p)$ analytique dans P^+ avec $|H(i\omega)| = C(\omega)$ donnée.

1 On fait le changement de variable $\omega = \tan \frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{2} d\theta$ et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln C(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |r(\theta)| d\theta$$

La condition de Paley-Wiener est donc équivalente à

$$\int_{-\pi}^{\pi} |r(\theta)| d\theta \text{ est bornée}$$

2 Cette condition entraîne que la fonction 2π -périodique $r(\theta)$ est développable en série de Fourier :

$$r(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n e^{-in\theta} \quad \text{avec} \quad r_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r(\theta) e^{in\theta} d\theta$$

On définit la fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} : $Y(z) = r_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{z^n}$.

a) La convergence de la série de Fourier entraîne que le coefficient $r_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Donc :

$\exists N(\epsilon) \mid n \geq N \Rightarrow |r_n| \leq \epsilon \Rightarrow \left| \frac{r_n}{z^n} \right| \leq \frac{\epsilon}{z^n}$; la série de Laurent ci-dessus est alors convergente dans (au moins) le codisque $|z| > 1$ ce qui assure l'analyticité de Y dans ce domaine.

b) Montrons que $\text{Re } Y(e^{i\theta}) = r(\theta)$.

$$r(\theta) = r_0 + \sum_{n \geq 1} r_n e^{-in\theta} + \sum_{n \leq -1} r_n e^{-in\theta} = r_0 + \sum_{n \geq 1} r_n e^{-in\theta} + \sum_{n \geq 1} \overline{r_n} e^{in\theta}$$

où on a utilisé le fait que $r(\theta)$ est réel et donc que $r_{-n} = \overline{r_n}$.

$$Y(e^{i\theta}) = r_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{-in\theta} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{-in\theta} = \frac{1}{2} [Y(e^{i\theta}) - r_0]$$

$$\begin{aligned} r(\theta) &= r_0 + \frac{1}{2} [Y(e^{i\theta}) - r_0] + \frac{1}{2} [\overline{Y(e^{i\theta})} - r_0] \\ &= \frac{1}{2} [Y(e^{i\theta}) + \overline{Y(e^{i\theta})}] = \text{Re } Y(e^{i\theta}) \end{aligned}$$

Donc $Y(z)$ analytique dans $\{z \mid |z| > 1\}$ et définie pour $|z| = 1$.

3 On effectue la transformation $z = \frac{1+p}{1-p}$

a) Le codisque du plan $z : |z| > 1$ devient dans le plan $p : \left| \frac{1+p}{1-p} \right| > 1$. On pose $p = \sigma + i\omega$

$$\frac{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}{(\sigma - 1)^2 + \omega^2} > 1 \Rightarrow (\sigma + 1)^2 + \omega^2 > (\sigma - 1)^2 + \omega^2 \Rightarrow \sigma > 0$$

Le domaine \mathcal{D} est défini par $\mathcal{D} = \{p \mid \text{Re } p > 0\} = P^+$.

b) $Y(z)$ analytique dans $\Omega = \{z \mid |z| > 1\}$ et définie pour $|z| = 1$. On définit $z \rightarrow p = \frac{z-1}{z+1}$ transformation conforme dans Ω et dans laquelle $\Omega \rightarrow P^+$ et $Y(z) \rightarrow c(p) = Y\left(\frac{1+p}{1-p}\right)$; alors $Y(z)$ analytique dans $\Omega \Leftrightarrow c(p)$ analytique dans P^+ .

4 On définit $H(p) = \exp(c(p))$. Comme $c(p)$ est analytique dans P^+ , $H(p)$ également. Remarquons que $\exp(-c(p))$ est aussi analytique dans P^+ ce qui signifie que $\frac{1}{H(p)}$ est analytique et donc que $H(p)$ n'a pas de zéro dans ce domaine. Le filtre de fonction de transfert $H(p)$ est donc à phase minimale.

Si on pose $p = i\omega$ on a $z = e^{i\theta}$ avec $\omega = \tan \frac{\theta}{2}$. On a alors la séquence d'égalités

$$\begin{aligned} c(i\omega) &= Y(e^{i\theta}) \quad ; \quad \operatorname{Re} c(i\omega) = \operatorname{Re} Y(e^{i\theta}) = r(\theta) = \ln C(\omega) \\ H(p) &= e^{c(p)} \Rightarrow |H(i\omega)| = e^{\operatorname{Re} c(i\omega)} = C(\omega) \end{aligned}$$

Conclusion : sous réserve que la fonction $C(\omega) = |G(\omega)|$ satisfasse la condition de Paley-Wiener, on a construit une fonction $H(p)$ analytique dans P^+ telle que $|H(i\omega)| = C(\omega)$. Il reste à montrer que cette condition est nécessaire.

Remarque

On déduit de ce théorème qu'un filtre idéal n'est pas réalisable puisqu'il faudrait $|G(\omega)| \equiv 0$ dans la bande atténuée, ce qui violerait le théorème.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Ce problème présente une démonstration du célèbre théorème de Paley-Wiener qui s'appuie sur le lien existant dans le plan complexe entre la transformée de Laplace (fonction de transfert), la transformée de Fourier (gain complexe) et les séries de Fourier, et qui met en jeu les propriétés des fonctions analytiques et les transformations conformes.

RAPPELS DE COURS

- *Équation de Bessel d'indice $\nu \in \mathbb{R}^+$*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (7.1)$$

- *Fonctions de Bessel*

Ce sont les solutions de cette équation. On les obtient sous la forme de développements en séries généralisées (voir exercice 7.1) :

- *Fonction de Bessel de première espèce*

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (7.2)$$

Si $\nu \notin \mathbb{N}$, $J_{-\nu}$ est aussi solution (singulière à l'origine) de l'équation de Bessel, indépendante de J_ν .

- *Fonction de Neumann (ou fonction de Bessel de deuxième espèce)*

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}$$

Cette solution est indépendante de J_ν même pour ν entier.

- *Fonctions de Hankel : $H_\nu^\pm(x) = J_\nu(x) \pm iN_\nu(x)$*
- *Relations de récurrence*

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x) \quad (7.3)$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \quad (7.4)$$

- *Fonction génératrice et représentation intégrale*

$$g(x, z) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n J_n(x) \quad z \in \mathbb{C}^* ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - n\theta)} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta$$

• *Équation de Bessel modifiée*

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad \nu \in \mathbb{R}^+$$

a pour solutions les *fonctions de Bessel modifiées*

$$I_\nu(x) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(ix) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} e^{(\nu+1)i\pi/2} H_\nu^+(ix)$$

• *Comportements pour x grand (x ≫ n)*

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad N_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$H_n^\pm(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$I_n(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x \quad K_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

• *Comportements à l'origine (x ~ 0)*

$$J_n(x) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad N_0(x) \approx \frac{2}{\pi} (\ln x + \gamma) \quad N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n \quad n \geq 1$$

$$I_n(x) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad K_0(x) \approx -\ln x - \gamma \quad K_n \approx (n-1)! \frac{2^{n-1}}{x^n} \quad n \geq 1$$

Remarquons que dans chaque couple de solutions, il y en a une qui est *régulière* à l'origine (J_n, I_n) et une qui est *singulière* (N_n, K_n).

ÉNONCÉS DES EXERCICES

7.1 Solutions de l'équation de Bessel

Dans cet exercice on supposera $\nu \notin \frac{1}{2}\mathbb{N}$. On peut montrer (théorème de Fuchs) que l'équation de Bessel (7.1) admet au moins une solution sous la forme d'une *série généralisée*

$$y(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

où α – appelé *exposant indiciel* – et la suite $\{a_n\}$ sont déterminés par identification.

- 1** En reportant dans l'équation de Bessel $y(x)$ sous la forme ci-dessus :
- Déterminer le coefficient du terme en $x^{\alpha-2}$ et celui du terme en $x^{\alpha-1}$. Que peut-on en déduire ?
 - Déterminer la relation de récurrence liant entre eux les coefficients a_n et a_{n-2} pour $n \geq 2$.
 - Résoudre cette relation de récurrence pour $n = 2k + 1$ puis pour $n = 2k$ en prenant $\alpha = \nu$.
- 2** On désigne par $J_\nu(x)$ la solution obtenue ci-dessus pour $\alpha = \nu$ et telle que

$$J_\nu(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \text{ quand } x \rightarrow 0$$

- Donner l'expression de $J_\nu(x)$.
- Établir que $J_{-\nu}(x)$, obtenue en changeant ν en $-\nu$ dans $J_\nu(x)$, est une autre solution de l'équation de Bessel (7.1) indépendante de $J_\nu(x)$.
- Montrer que si $\nu = n \in \mathbb{N}$ les deux fonctions J_n et J_{-n} ne sont pas indépendantes.

7.2 Autres fonctions de Bessel

- 1** Les fonctions de Bessel modifiées satisfont l'équation

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad \nu \in \mathbb{R}^+$$

Exprimer la solution I_1 (solution régulière à l'origine pour $\nu = 1$) sous la forme d'une série entière. On fixera la constante arbitraire en imposant $I_1(x) \underset{x \sim 0}{\sim} \frac{x}{2}$.

- 2** L'équation de Bessel sphérique est définie par

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right]y = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

- Rechercher les deux solutions indépendantes de l'équation de Bessel sphérique pour $n = 0$ sous la forme de développement en série généralisée. Expliciter ces fonctions en termes de fonctions usuelles.
- Montrer que

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x)$$

est solution de cette équation ; ces fonctions sont appelées fonctions de Bessel sphériques.

7.3 Propriétés de fonctions de Bessel d'indice entier

- 1** *Fonction génératrice* : À l'aide de la fonction génératrice établir l'identité

$$J_n(x+y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(x) J_{n-p}(y)$$

Chapitre 7 • Fonctions de Bessel

2 Relation de récurrence : Etablir $[x^n J_n(x)]' = x^n J_{n-1}(x)$ puis $[J_n(x)/x^n]' = -J_{n+1}(x)/x^n$. En déduire les relations de récurrence (équations 7.3, 7.4) et en particulier $J_0'(x) = -J_1(x)$.

3 Représentations intégrales

a) Établir l'identité

$$\frac{1}{\Gamma(k + \nu + 1)} = \frac{2}{\Gamma(k + \frac{1}{2})\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} t \cos^{2\nu} t dt$$

b) En déduire les représentations intégrales

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) \cos^{2\nu} t dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^1 (1 - t^2)^{\nu-1/2} \cos(xt) dt \end{aligned}$$

7.4 Équation avec un paramètre

Montrer que l'équation

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (a - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0 \quad a \in \mathbb{R}$$

a pour solution :

- si $a > 0$, $J_\nu(x\sqrt{a})$ et $N_\nu(x\sqrt{a})$
- si $a < 0$, $I_\nu(x\sqrt{|a|})$ et $K_\nu(x\sqrt{|a|})$
- si $a = 0$
 - ◊ x^ν et $x^{-\nu}$ si $\nu > 0$
 - ◊ $\alpha + \beta \ln x$ si $\nu = 0$.

7.5 Transformée de Fourier

1 Calculer la transformée de Fourier de

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad |t| < 1 \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

2 En déduire la transformée de Fourier de J_0 .

7.6 Transformée de Laplace

1 Développer en série entière la fonction $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad |x| < 1$.

2 À l'aide du développement en série entière de J_0 déterminer $\mathcal{L}\{J_0\}$.

ÉNONCÉS DES PROBLÈMES

Problème 7.1 Modulation de fréquence

La pulsation instantanée $\Omega(t)$ d'un signal sinusoïdal $f(t) = A_0 \cos \phi(t)$ est définie par $\Omega(t) = \frac{d}{dt} \phi(t)$. Pour un signal *harmonique*, $\Omega(t)$ est constant : $\Omega(t) = \Omega_0$ et $\phi(t) = \Omega_0 t + \phi_0$. Une onde est dite *modulée en fréquence* si son impulsion instantanée est de la forme

$$\Omega(t) = \Omega_0 + k\omega \cos(\omega t)$$

où Ω_0 est la pulsation de l'onde porteuse, ω celle de la modulation et k l'indice de modulation.

1 Montrer que la forme générale du signal modulé est

$$f(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + k \sin(\omega t) + \phi_0)$$

où A_0 est l'amplitude du signal et ϕ_0 sa phase à l'origine.

2 Montrer que cette onde admet un développement en fréquence de la forme

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

où les coefficients a_n , ω_n et ϕ_n sont à déterminer. Qu'est-ce qui différencie ce développement d'une série de Fourier ?

Problème 7.2 Fil chauffant

1 *Préliminaire*

On définit la fonction de Bessel modifiée K_0 par sa représentation intégrale

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \cosh t} dt \quad x > 0$$

Montrer que

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2t} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right) u(t) \right\} = \frac{1}{2} K_0(a\sqrt{p}) \quad a > 0$$

où \mathcal{L} désigne la transformation de Laplace.

On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} x K_0'(x) = -1$. Cette relation pourra être utilisée dans la suite.

2 *Fil chauffant*

Un fil chauffant rectiligne est plongé dans un milieu homogène et engendre un flux de chaleur radial constant ϕ_0 . Le milieu est initialement à la température 0. À un instant $t > 0$ la température en un point du milieu, $u(r, t)$, ne dépend que du temps t et de la distance r du point au fil, et satisfait l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \lambda^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \lambda > 0$$

et les conditions

$$u(r, t = 0) = 0 \quad r > 0 \quad (7.5)$$

$$u(r, t) \text{ bornée} \quad r > 0, \quad t \geq 0 \quad (7.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial u}{\partial r}(r, t) = -\phi_0 \quad r > 0, \quad t \geq 0 \quad (7.7)$$

a) On désigne par $U(r, p)$ la transformée de Laplace de u par rapport à t :

$$U(r, p) = \int_0^\infty u(r, t) e^{-pt} dt$$

Ecrire l'équation satisfaite par U .

b) Compte tenu des résultats du préliminaire montrer que la seule solution acceptable est de la forme

$$U(r, p) = A(p)K_0(\lambda r \sqrt{p})$$

où $A(p)$ est une fonction arbitraire.

c) Déterminer $A(p)$ à l'aide de la condition de flux (eq. 7.7).

d) En déduire la solution du problème $u(r, t)$.

Problème 7.3 Membrane de haut-parleur

Les vibrations d'une membrane circulaire de rayon R fixée sur sa périphérie (membrane de haut-parleur ou peau de tambour) sont décrites par la fonction $f(r, \theta, t)$, qui mesure à l'instant t le déplacement transversal de la membrane au point de coordonnées polaires r et θ par rapport à sa position au repos. En supposant la membrane parfaitement élastique, la fonction f est solution de l'équation d'ondes à deux dimensions en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

où $c > 0$ est la vitesse sonique sur la membrane. De plus la fonction f est bornée (amplitude finie des vibrations) et elle satisfait la condition aux limites $f(R, \theta, t) = 0$ (amplitude nulle des vibrations sur le pourtour de la membrane). Pour résoudre ce problème aux limites, on cherche des solutions harmoniques dont la pulsation ω est à déterminer :

$$f(r, \theta, t) = g(r, \theta) \cos(\omega t - \varphi)$$

1 Écrire l'équation aux dérivées partielles dont g est solution.

2 Les coordonnées (r, θ) et $(r, \theta + 2\pi)$ représentant le même point de la membrane la fonction g doit satisfaire la condition de périodicité $g(r, \theta + 2\pi) = g(r, \theta)$, $\forall \theta$ et $r (\leq R)$. On cherche donc g sous la forme d'une série de Fourier

$$g(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta$$

a) Établir l'équation différentielle dont les coefficients $a_n(r)$ et $b_n(r)$ sont solutions.

b) Montrer que les seules solutions acceptables sont de la forme

$$a_n(r) = A_n J_n\left(\frac{\omega}{c}r\right) \quad n \in \mathbb{N} \quad b_n(r) = B_n J_n\left(\frac{\omega}{c}r\right) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

où A_n et B_n sont des constantes arbitraires.

3 Soit $\{z_p^{(n)}\}$ la suite croissante des zéros positifs de J_n (i.e. $J_n(z_p^{(n)}) = 0 \forall p \in \mathbb{N}^*$). Montrer que la condition aux limites impose à la pulsation ω de ne prendre que des valeurs discrètes liées à $z_p^{(n)}$. On notera $\omega_{n,p}$ ces valeurs (ce sont les modes élémentaires de vibration du tambour).

4 On note $g_{n,p}$ la solution correspondant à $\omega_{n,p}$. Déterminer les lignes nodales, c'est-à-dire les ensembles de points de la membrane qui demeurent immobiles dans un mode de vibration donné. Quelles sont les solutions invariantes par rotation ? À l'aide de Maple tracer l'image de la membrane pour les premiers modes de vibrations.

Problème 7.4 Guides d'ondes cylindriques

On va étudier dans ce problème les guides d'ondes cylindriques, métalliques dans la première partie et diélectriques (fibres optiques) dans la seconde. Les deux problèmes diffèrent par les conditions aux limites mais ont en commun la géométrie et la paramétrisation initiale des champs. Nous injectons dans le guide d'onde de rayon a un champ électromagnétique harmonique à la fréquence ω qui se propage suivant l'axe Oz ; l'expression de ce champ au point M repéré par ses coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) est :

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z, t) = [E_z(\rho)\mathbf{e}_z + \mathbf{E}_T(\rho)] e^{i(kz - \omega t)}$$

où la composante longitudinale E_z et la composante transverse \mathbf{E}_T (voir figure 7.1) sont supposées ici ne dépendre que de la coordonnée radiale ρ (symétrie azimutale). Le facteur de propagation k sera déterminé par les conditions aux limites. Le vecteur \mathbf{e}_z est le vecteur unitaire le long de l'axe du guide (axe Oz). Le champ transverse \mathbf{E}_T se décompose dans le repère lié au

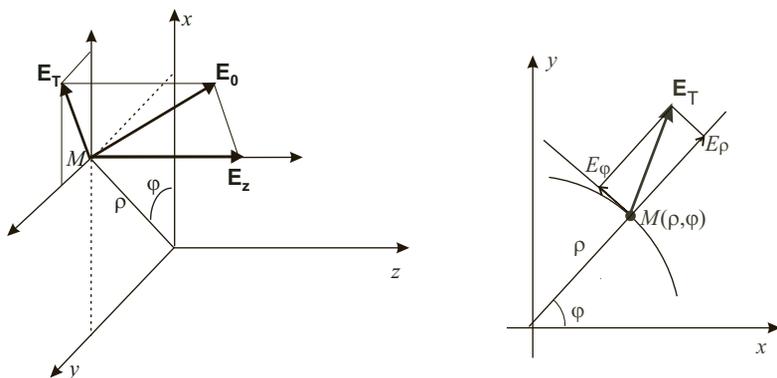


Figure 7.1

Chapitre 7 · Fonctions de Bessel

point M (voir figure 7.1) selon les directions radiale (vecteur unitaire \mathbf{e}_ρ) et tangentielle (vecteur unitaire \mathbf{e}_φ)

$$\mathbf{E}_T(\rho) = E_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + E_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi$$

Les composantes longitudinale $E_z(\rho)e^{i(kz-\omega t)}$ et transverse $\mathbf{E}_T(\rho)e^{i(kz-\omega t)}$ du champ sont solution de l'équation d'onde exprimée en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

Ce même formalisme s'applique aussi au champ magnétique \mathbf{B} .

La méthode de résolution consiste à résoudre d'abord l'équation d'onde pour les champs longitudinaux (E_z et B_z) puis à exprimer les champs transverses (\mathbf{E}_T et \mathbf{B}_T) en fonction des champs longitudinaux à l'aide des équations de Maxwell.

1 Guide d'onde cylindrique métallique

Nous allons nous placer dans le mode transverse magnétique (TM) dans lequel le champ électrique transverse a seulement une composante radiale : $\mathbf{E}_T(\rho) = E_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho$. La *condition de continuité* de la composante tangentielle du champ (ici E_z) impose que E_z doit être nulle sur la surface du guide :

$$E_z(\rho = a) = 0 \quad (7.8)$$

a) Montrer que $E_z(\rho)$ est solution de l'équation

$$E_z'' + \frac{1}{\rho} E_z' + \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 \right] E_z = 0 \quad \rho \leq a$$

b) Montrer que les conditions du problème, et en particulier la condition de continuité (équation 7.8), imposent que la constante de propagation satisfasse la condition $k^2 < \left(\frac{\omega}{c} \right)^2$ et que la fonction E_z soit de la forme

$$E_z(\rho) = A J_0(\gamma \rho)$$

avec $\gamma = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2}$ et A une constante arbitraire.

c) On impose maintenant à la solution de 1 (b) de satisfaire la condition de continuité (équation 7.8).

i) Établir que le paramètre γ ne peut prendre qu'un ensemble discret de valeurs.

ii) En déduire que le champ ne peut se propager que pour des fréquences supérieures à une certaine valeur ω_c appelée fréquence de coupure et que l'on déterminera.

d) Déterminer la composante transverse à partir de l'équation de Maxwell

$$E_\rho(\rho) = \frac{ik}{\gamma^2} \frac{\partial E_z(\rho)}{\partial \rho}$$

2 Modes de propagation dans une fibre optique

La gaine et le cœur d'une fibre optique sont des diélectriques d'indices respectifs $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$ et $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ avec $n_1 < n_2$ (voir figure 7.2). On injecte dans le cœur de la fibre un champ harmonique à la fréquence ω qui se propage suivant l'axe Oz et qui possède la symétrie azimutale (voir préliminaire de ce problème). On indice par 1 les champs dans la gaine, par 2 les champs dans le cœur. Nous allons déterminer la composante longitudinale des champs, $E_z(\rho)$ (et $B_z(\rho)$ pour le champ magnétique), qui est une solution bornée de l'équation d'onde et qui doit satisfaire :

- dans la gaine le champ doit être rapidement amorti dans la direction transverse : $E_{1z}(\rho) \simeq e^{-\rho}$.
- dans le cœur, au contraire il ne doit pas y avoir d'amortissement transverse.

a) Compte tenu de ces conditions, des résultats de **1** et de l'exercice 7.4, établir que le champ est de la forme

$$\rho > a \quad E_{1z} = A_1 K_0(\beta\rho) \quad \text{avec} \quad \beta = \sqrt{k^2 - \epsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (7.9)$$

$$\rho < a \quad E_{2z} = A_2 J_0(\gamma\rho) \quad \text{avec} \quad \gamma = \sqrt{\epsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \quad (7.10)$$

où A_1 et A_2 sont des constantes arbitraires. Le champ $B_z(\rho)$ est de la même forme. Remarquons que les conditions ci-dessus contraignent le facteur de propagation k pour une fréquence donnée : $\sqrt{\epsilon_1} \frac{\omega}{c} < k < \sqrt{\epsilon_2} \frac{\omega}{c}$.

b) Les composantes transverses des champs dans chaque milieu s'expriment à partir des équations de Maxwell en fonction des composantes longitudinales E_z et B_z . Nous allons étudier les modes transverses électriques (TE) pour lesquels on fixe $E_{1z} = E_{2z} = 0$.

Le champ transverse se décompose suivant ses composantes cylindro-polaires (voir figure 7.1) :

$$\mathbf{E}_T(\rho) = E_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + E_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{B}_T(\rho) = B_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + B_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi$$

Les équations de Maxwell dans le mode TE ($E_z = 0$) impliquent dans chaque milieu $B_\rho = E_\rho = 0$ et

$$\left(\epsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) B_{1\rho} = ik \frac{\partial B_{1z}}{\partial \rho} \quad E_{1\varphi} = -\frac{\omega}{ck} B_{1\rho}$$

$$\left(\epsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) B_{2\rho} = ik \frac{\partial B_{2z}}{\partial \rho} \quad E_{2\varphi} = -\frac{\omega}{ck} B_{2\rho}$$

où B_{1z} et B_{2z} ont la même forme que E_{1z} et E_{2z} dans les équations (7.9, 7.10).

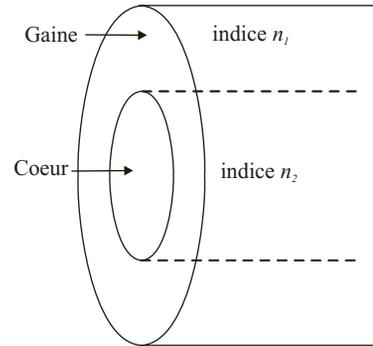


Figure 7.2

Montrer que

$$\begin{aligned} \rho > a \quad B_{1z} = C_1 K_0(\beta\rho) &\implies B_{1\rho} = \frac{ik}{\beta} C_1 K_1(\beta\rho) & E_{1\varphi} = -\frac{i\omega}{\beta c} C_1 K_1(\beta\rho) \\ \rho < a \quad B_{2z} = C_2 J_0(\gamma\rho) &\implies B_{2\rho} = -\frac{ik}{\gamma} C_2 J_1(\gamma\rho) & E_{2\varphi} = \frac{i\omega}{\gamma c} C_2 J_1(\gamma\rho) \end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

- c) On impose maintenant les conditions de continuité des composantes tangentielles des champs entre les deux milieux, en $\rho = a$.

$$B_{1z}(a) = B_{2z}(a) \quad ; \quad E_{1\varphi}(a) = E_{2\varphi}(a)$$

En déduire que cela entraîne pour la constante de propagation k une contrainte qui peut s'exprimer :

$$\frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)} + \frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)} = 0 \quad \gamma^2 + \beta^2 = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{\omega^2}{c^2}$$

- d) Montrer, en vous aidant d'une résolution graphique (à la main ou avec Maple), que l'équation ci-dessus n'a pas de solution si la fréquence ω est inférieure à une fréquence ω_c appelée fréquence de coupure donnée par $\omega_c = \xi_1 \frac{c}{a\sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}}$ où $\xi_1 = 2,405\dots$ est le premier zéro de J_0 . Pour $\omega > \omega_c$ les modes TE apparaissent.

Problème 7.5 Transformation de Hankel

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, continue, dont le module décroît à l'infini plus vite que $1/\sqrt{r}$. On définit sa transformée de Hankel d'ordre $n \in \mathbb{N}$, $F(k)$, par :

$$k \in \mathbb{R}^+ \rightarrow F(k) = \int_0^\infty r J_n(kr) f(r) dr \quad (7.11)$$

où J_n est la fonction de Bessel d'indice entier n . On se propose d'établir la formule de la transformation inverse :

$$f(r) = \int_0^\infty k J_n(kr) F(k) dk \quad (7.12)$$

Pour cela on a recours à la transformation de Fourier à deux dimensions. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ que l'on supposera continue (bien que cela ne soit pas nécessaire) et de module intégrable dans \mathbb{R}^2 ; on définit sa transformée de Fourier (en pulsation) G par :

$$G(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^\infty dx_1 \int_{-\infty}^\infty dx_2 e^{-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} g(x_1, x_2)$$

et la transformation inverse :

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} G(\omega_1, \omega_2)$$

Dans toute la suite on admettra que les conditions sur g sont suffisantes pour assurer la convergence des intégrales ci-dessus.

On effectue le changement de variables :

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta & x_2 &= r \sin \theta \\ \omega_1 &= k \sin \phi & \omega_2 &= k \cos \phi \end{aligned}$$

où r et k sont dans \mathbb{R}^+ et θ et ϕ dans $[-\pi, \pi]$.

Attention à la position du cosinus et du sinus dans la transformation $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow (k, \phi)$.

- 1** Expliciter les transformations de Fourier directe et inverse pour les fonctions

$$\tilde{g}(r, \theta) = g(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad \text{et} \quad \tilde{G}(k, \phi) = G(k \sin \phi, k \cos \phi)$$

(on rappelle que dans les changements de variables des équations 1 et 2, $dx_1 dx_2 \rightarrow r dr d\theta$ et $d\omega_1 d\omega_2 \rightarrow k dk d\phi$).

- 2** On prend $\tilde{g}(r, \theta) = e^{in\theta} f(r)$ où $n \in \mathbb{N}$ où f satisfait les conditions énoncées au début.
a) On définit

$$I_n(\phi) = \int_0^{2\pi} e^{-ikr \sin(\phi+\theta)} e^{in\theta} d\theta \quad n \in \mathbb{N}$$

Montrer que $I_n(\phi) = 2\pi e^{-in\phi} J_n(kr)$.

- b)** En déduire que \tilde{G} , la transformée de Fourier de \tilde{g} , est de la forme :

$$\tilde{G}(k, \phi) = 2\pi e^{-in\phi} F(k)$$

avec $F(k)$ défini par l'équation 7.11.

- 3** En déduire la formule de la transformation inverse de Hankel (équation 7.12).
4 En utilisant la transformée de Laplace par rapport à k de $J_0(kr)$ (voir exercice 7.6) déterminer la transformée de Hankel d'ordre zéro de :

$$r \in \mathbb{R}^+ \rightarrow f(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \quad a > 0$$

DU MAL À DÉMARRER ?

- 7.1 La relation de récurrence a un pas de 2 et relie donc entre eux les coefficients d'indice de même parité.
- 7.2 **2** Attention ! la méthode de résolution conduit à trois solutions. Sont-elles indépendantes ?
- 7.3 Pour démontrer la relation de récurrence utiliser la représentation de J_n par la série. Même chose pour la représentation intégrale ; on admettra de plus la permutation de l'intégration sur t et de la somme sur k de la série.
- 7.4 Faire le changement de variable $u = x\sqrt{|a|}$
- 7.5 Utiliser la représentation intégrale de J_0 établie dans l'exercice 7.3 **3** (b).

Problème 7.1

Passer en représentation complexe et utiliser la fonction génératrice des fonctions de Bessel pour $z = e^{i\omega t}$

Problème 7.2

Préliminaire : faire le changement de variable $\frac{2t\sqrt{p}}{a} = e^u$;

Dans **2** (b) utiliser le comportement asymptotique des fonctions de Bessel pour sélectionner les solutions ; dans **2** (d) utiliser la fonction exponentielle intégrale $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Problème 7.3

Si une série de Fourier est (identiquement) nulle tous ses coefficients sont nuls. Les équations engendrées pour a_n et b_n sont des équations de Bessel. Seules les solutions régulières à l'origine sont acceptables (amplitudes finies).

Problème 7.4

- 1** (b) Utiliser le résultat de l'exercice 7.4.
- 1** (c) On rappelle que les J_n ont une infinité de zéros.
- 2** (a) Dans l'équation d'onde remplacer c par c/n_1 ou c/n_2 selon le milieu.
- 2** (b) Utiliser $J'_0 = -J_1$ et $K'_0 = -K_1$;
- 2** (d) Pour trouver les conditions de résolution de l'équation on peut soit étudier le signe de chaque membre soit avoir recours à un programme Maple.

Problème 7.5

- 2** (a) À un moment il faut utiliser la périodicité de l'intégrant.
- 3** Utiliser le résultat de la **2** (a).
- 4** Utiliser la réciprocity de la transformation de Hankel.

7.1 On rappelle que $\nu > 0$ et $2\nu \notin \mathbb{N}$. On cherche une solution sous la forme d'une *série généralisée*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

1 En reportant dans l'équation de Bessel : $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-2} + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)a_n x^{n+\alpha} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = 0$$

a) On annule le coefficient du terme en $x^{\alpha-2}$:

$$\alpha(\alpha-1)a_0 + \alpha a_0 - \nu^2 a_0 = (\alpha^2 - \nu^2) a_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm \nu \text{ puisque } a_0 \neq 0$$

et celui du terme en $x^{\alpha-1}$.

$$\alpha(\alpha+1)a_1 + (\alpha+1)a_1 - \nu^2 a_1 = ((\alpha+1)^2 - \nu^2) a_1$$

On remplace α par $\pm \nu$

$$(\pm 2\nu + 1) a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ puisque } 2\nu \neq \text{entier}$$

b) La relation de récurrence liant les coefficients a_n et a_{n-2} se déduit de l'annulation du coefficient de $x^{n+\alpha-2}$ pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} (n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n + (n+\alpha)a_n - \nu^2 a_n + a_{n-2} &= 0 \\ [(n+\alpha)^2 - \nu^2] a_n &= -a_{n-2} \end{aligned}$$

c) Résolution de cette relation de récurrence

$$\alpha = \pm \nu \Rightarrow (n+\alpha)^2 - \nu^2 = n(n \pm 2\nu) \neq 0 \text{ puisque } 2\nu \neq \text{entier}$$

$$\text{pour } \alpha = \nu : a_n = -\frac{1}{n(n+2\nu)} a_{n-2} \quad n \geq 2$$

Cette relation lie entre eux les coefficients de même parité ; comme $a_1 = 0$, on a $a_{2k+1} = 0 \forall k \geq 0$. Pour $n = 2k$ ($k \geq 1$) :

$$\begin{aligned} a_{2k} &= -\frac{1}{2k(2k+2\nu)} a_{2k-2} = -\frac{1}{2^2 k(k+\nu)} a_{2k-2} \quad ; \quad k \geq 1 \\ \Rightarrow a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! [(k+\nu)(k-1+\nu) \cdots (1+\nu)]} a_0 = \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} k! \Gamma(k+\nu+1)} a_0 \\ \Rightarrow y_\nu(x) &= a_0 \Gamma(\nu+1) x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k+\nu+1)} x^{2k} \end{aligned}$$

où a_0 demeure arbitraire.

2 Pour $x \sim 0 \Rightarrow y_\nu(x) \sim a_0 x^\nu \equiv \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$.

a) On en déduit

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

b) L'autre solution correspond à choisir $\alpha = -\nu$. Les calculs ci-dessus sont reproduits à l'identique et conduisent à

$$y_{-\nu}(x) = \Gamma(-\nu+1) a_0 x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k-\nu+1)} x^{2k}$$

Comme ν est non entier $\Gamma(k-\nu+1)$ est définie $\forall k$. En prenant pour $a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}} \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}$ on obtient pour la seconde solution

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Les deux fonctions J_ν et $J_{-\nu}$ sont indépendantes puisque pour $x \sim 0$ la première s'annule comme x^ν alors que la seconde est singulière comme $x^{-\nu}$.

c) Si $\nu = n \in \mathbb{N}$ le terme qui apparaît au dénominateur de l'expression de $J_{-\nu}$, $\Gamma(k-\nu+1)|_{\nu=n} = \Gamma(k-n+1) = \infty$ pour $k \leq n-1$ puisque la fonction Γ a des pôles pour tous les entiers négatifs ou nuls (voir chapitre 1). Les termes correspondant dans la somme sur k sont donc nuls et la somme démarre à $k = n$.

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

En utilisant le fait que pour $k \geq n$, $\Gamma(k-n+1) = (k-n)!$ et en faisant le changement d'indice $l = k - n$

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+n}}{(l+n)! l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(l+n)} = (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+n)! l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \\ &= (-1)^n J_n(x) \end{aligned}$$

Les deux fonctions J_n et J_{-n} ne sont donc pas indépendantes.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

On explore la méthode de résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients non constants par recherche de solutions sous forme de séries entières ou de séries entières généralisées (multipliées par une puissance réelle ou complexe de x). Cette méthode sera développée au chapitre 9.

7.2 1 La fonction de Bessel modifiée I_1 satisfait l'équation : $x^2 y'' + x y' - (1+x^2)y = 0 \quad \nu \in \mathbb{R}^+$.

On cherche une solution de la forme d'une série entière $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$-a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)a_n + n a_n - a_n - a_{n-2}] x^n \equiv 0 \quad (\text{les termes en } x \text{ se compensent})$$

$$\Rightarrow a_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{1}{n^2 - 1} a_{n-2} \quad n \geq 2$$

$$\Rightarrow a_{2k} = 0 \quad a_{2k+1} = \frac{1}{2k(2k+2)} a_{2k-1} \quad k \geq 1$$

$$\Rightarrow a_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k} k! (k+1)!} a_1$$

On obtient finalement

$$y(x) = a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k} k! (k+1)!} x^{2k+1}$$

Pour $x \sim 0$ la fonction y se comporte comme $a_1 x$. On prend donc $a_1 = \frac{1}{2}$

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

2 La fonction de Bessel sphérique j_0 satisfait l'équation

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$$

a) On cherche une solution de la forme $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} \quad (a_0 \neq 0)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2} + \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = 0$$

On injecte dans l'équation et on isole les termes de même puissance :

$$\begin{aligned} & \text{terme en } x^{\alpha-2} \quad [\alpha(\alpha-1) + 2\alpha] a_0 = 0 \\ \Rightarrow & \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -1 \\ & \text{terme en } x^{\alpha-1} \quad [\alpha(\alpha+1) + 2(\alpha+1)] a_1 = 0 \\ & \text{terme en } x^{n+\alpha-2} \quad n \geq 2 \quad [(n+\alpha)(n+\alpha-1) + 2(n+\alpha)] a_n + a_{n-2} = 0 \end{aligned}$$

Chapitre 7 · Fonctions de Bessel

La première solution (régulière) j_0 correspond à $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \text{terme en } x^{-1} &\Rightarrow 2a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ \text{terme en } x^{n-2} &\Rightarrow a_n = \frac{-1}{n(n+1)}a_{n-2} \end{aligned}$$

Comme $a_1 = 0$ la série des coefficients impairs est nulle : $a_{2k+1} = 0$. Pour les coefficients d'indice pair

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{-1}{2k(2k+1)}a_{2k-2} \Rightarrow a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_0 \\ \Rightarrow j_0(x) &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k} = a_0 \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

La deuxième solution correspond à $\alpha = -1$

$$\text{terme en } x^{\alpha-1} \quad [\alpha(\alpha+1) + 2(\alpha+1)]a_1 = 0 \times a_1 = 0$$

Cette fois-ci l'équation ne permet pas de fixer a_1 qui reste arbitraire ;

$$\text{terme en } x^{n+\alpha-2} \quad n \geq 2 \quad [(n-1)(n-2) + 2(n-1)]a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = \frac{-1}{n(n-1)}a_{n-2}$$

Les deux séries de coefficients d'indices pair et impair sont présentes. On obtient donc apparemment deux nouvelles solutions en plus de j_0 , soit trois solutions ! Déterminons-les. Commençons par la solution impaire que l'on note $y_I(x)$:

$$\begin{aligned} n = 2k + 1 &\Rightarrow a_{2k+1} = \frac{-1}{(2k+1)2k}a_{2k-1} \Rightarrow a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1 \\ \Rightarrow y_I(x) &= a_1 x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = a_1 \frac{\sin x}{x} \propto j_0(x) \end{aligned}$$

Cette solution n'est donc pas une nouvelle solution. Regardons maintenant la solution paire, $y_P(x)$:

$$\begin{aligned} n = 2k &\Rightarrow a_{2k} = \frac{-1}{2k(2k-1)}a_{2k-2} \Rightarrow a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0 \Rightarrow y_P(x) = a_0 x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \\ \Rightarrow y_P(x) &= a_0 \frac{\cos x}{x} \end{aligned}$$

Seule cette solution y_P est nouvelle et indépendante de la première, $j_0(x)$; on remarque que ces deux solutions s'expriment en termes de fonctions usuelles.

b) Vérifions que $j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x)$ est solution

$$\begin{aligned} j_n &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2} \Rightarrow j'_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} J'_{n+1/2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} J_{n+1/2} \right] \\ \Rightarrow j''_n &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} J''_{n+1/2} - \frac{1}{x\sqrt{x}} J'_{n+1/2} + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}} J_{n+1/2} \right] \end{aligned}$$

On injecte dans l'équation

$$\begin{aligned} j''_n + \frac{2}{x} j'_n + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right] j_n &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[J''_{n+1/2} + \frac{1}{x} J'_{n+1/2} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2} - \frac{1}{4x^2} J_{n+1/2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[J''_{n+1/2} + \frac{1}{x} J'_{n+1/2} + \left(1 - \frac{(n+1/2)^2}{x^2} \right) J_{n+1/2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisqu'on retrouve l'équation de Bessel d'indice $n + 1/2$ de laquelle $J_{n+1/2}$ est solution.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La même méthode que dans l'exercice précédent permet d'obtenir les solutions de l'équation de Bessel modifiée et de l'équation de Bessel sphérique. Ces dernières s'expriment en termes de fonctions simples. Rappelons que dans un intervalle donné une équation différentielle linéaire d'ordre n a n solutions indépendantes.

7.3 1 Fonction génératrice : on a l'identité :

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{x+y}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] &= \exp \left[\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \exp \left[\frac{y}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n J_n(x+y) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} z^p J_p(x) \sum_{q=-\infty}^{\infty} z^q J_q(y) \\ &= \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} z^{p+q} J_p(x) J_q(y) \end{aligned}$$

On isole le terme en z^n en faisant dans la dernière somme le changement d'indices : $(p, q) \rightarrow (p, n = p + q)$. On obtient

$$J_n(x+y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(x) J_{n-p}(y)$$

2 Relation de récurrence : Utilisons la représentation en série entière de J_n

$$\begin{aligned} x^n J_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \frac{x^{2k+2n}}{2^{2k+n}} \\ [x^n J_n(x)]' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \frac{(2k+2n)x^{2k+2n-1}}{2^{2k+n}} \\ &= x^n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = x^n J_{n-1}(x) \end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned} J_n(x)/x^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \frac{x^{2k}}{2^{2k+n}} \\ [J_n(x)/x^n]' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \frac{(2k)x^{2k-1}}{2^{2k+n}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(k+n)!} \frac{x^{2k-1}}{2^{2k+n}} \\ &= 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l!(l+1+n)!} \frac{x^{2l+1}}{2^{2l+2+n}} = -\frac{1}{x^n} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \\ &= -J_{n+1}(x)/x^n \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} nx^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x) &= x^n J_{n-1}(x) \\ -n J_n(x)/x^{n+1} + J_n'(x)/x^n &= -J_{n+1}(x)/x^n \end{aligned}$$

En combinant ces deux équations pour éliminer soit J_n soit J_n' on retrouve les équations (7.3,7.4). En particulier en faisant $n = 0$ dans l'équation 7.3 : $J_0'(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x)$ puisque $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ (cf. exercice 7.1, **2** (c)).

3 Représentations intégrales

a) On rappelle (voir chapitre 1)

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad ; \quad B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} t \sin^{2y-1} t dt$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} t \cos^{2\nu} t dt &= \frac{1}{2} B\left(k + \frac{1}{2}, \nu + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k + \nu + 1)} \\ \frac{1}{\Gamma(k + \nu + 1)} &= \frac{2}{\Gamma(k + \frac{1}{2})\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} t \cos^{2\nu} t dt \end{aligned}$$

b) On remplace $\frac{1}{\Gamma(k + \nu + 1)}$ dans la série qui représente J_ν (équation 7.2)

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{2}{\Gamma(k + \frac{1}{2})\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} t \cos^{2\nu} t dt \\ &= \frac{2(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu} t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{\sin^{2k} t}{\Gamma(k + \frac{1}{2})} \right\} dt \end{aligned}$$

où on a permuté intégration sur t et sommation sur k . On rappelle $\Gamma(k + \frac{1}{2}) = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!} \sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu} t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{2^{2k}k!}{(2k)!} \sin^{2k} t \right\} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu} t \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (x \sin t)^{2k} \right\} dt \end{aligned}$$

On reconnaît dans la somme le développement de $\cos(x \sin t)$

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu} t \cos(x \sin t) dt$$

En faisant dans cette dernière intégrale le changement de variable

$$u = \sin t \Rightarrow dt = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} ; (\cos t)^{2\nu} = (1-u^2)^\nu$$

on obtient

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} \cos(xu) du$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Ces diverses propriétés des fonctions de Bessel sont très utilisées dans les calculs.

7.4 Si $a > 0$, on pose $a = k^2$ et si $a < 0$, on pose $a = -k^2$. On a donc $k = \sqrt{|a|}$. Faisons dans l'équation le changement de variable $t = kx$ avec $z(t) = y\left(\frac{t}{k}\right)$. On a donc (dérivée d'une fonction composée)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dx} = kz' \quad ; \quad y'' = \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{d}{dt} (kz') \frac{dt}{dx} = k^2 z''$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(a - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \Rightarrow k^2 z'' + \frac{k}{t} kz' + \left(\pm k^2 - \frac{k^2 \nu^2}{t^2}\right) z = 0$$

Chapitre 7 • Fonctions de Bessel

où le signe \pm est celui de a . Si $a \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$ on divise par k^2

$$a \neq 0 \Rightarrow z'' + \frac{1}{t}y' + (\pm 1 - \frac{\nu^2}{t^2})z = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow z(t) = J_\nu(t) \text{ ou } N_\nu(t) \Rightarrow y(x) = J_\nu(x\sqrt{a}) \text{ ou } N_\nu(x\sqrt{a})$$

$$a < 0 \Rightarrow z(t) = I_\nu(t) \text{ ou } K_\nu(t) \Rightarrow y(x) = I_\nu(x\sqrt{|a|}) \text{ ou } K_\nu(x\sqrt{|a|})$$

Si $a = 0$ l'équation devient $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{\nu^2}{x^2}y = 0$ qui est une équation homogène ; pour $\nu \neq 0$ les solutions sont de la forme $x^{\pm\nu}$. Pour $\nu = 0$ on a $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$ qui a pour solutions $\alpha + \beta \ln x$ avec α et β constantes arbitraires.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Ce résultat est exploité dans beaucoup de problèmes aux limites dans la mise en œuvre de conditions aux limites et permet de sélectionner la forme des solutions (voir problèmes 7.2, 7.3, 7.4).

7.5 1 La transformée de Fourier de la fonction

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad |t| < 1 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

est donnée par

$$F(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{-2i\pi\nu t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cos(2\pi\nu t) dt$$

où l'on a utilisé la parité pour obtenir la dernière expression. D'après la représentation intégrale de l'exercice 7.3 3 (b) on a

$$F(\nu) = J_0(2\pi\nu)$$

2 On en déduit

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} J_0(2\pi\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu \underset{x=2\pi\nu}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(x) e^{-ixt} dx = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(J_0)|_{2\pi\nu=t} \\ \Rightarrow \mathcal{F}\{J_0\} &= 2\pi f(2\pi\nu) \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

Cet exercice fournit un exemple de transformée de Fourier d'une fonction non bornée de \mathcal{L}^1 et aussi un exemple d'utilisation de la représentation intégrale de J_0 .

7.6 1 Développement en série entière de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right) \frac{x^{2n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n [1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)] \frac{x^{2n}}{n!} \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \end{aligned}$$

2 Par ailleurs on a

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Prenons la transformée de Laplace de la série (qui converge uniformément sur \mathbb{R}^+)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{J_0(x)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{p^{2n+1}} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad p > 1 \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de cet exercice

La méthode de transformation de Laplace vue au chapitre 3 qui consiste à transformer terme à terme le développement en série entière de la fonction conduit ici à un résultat simple.

Problème 7.1

La pulsation instantanée d'une onde modulée en fréquence a pour expression

$$\Omega(t) = \Omega_0 + k\omega \cos(\omega t)$$

où Ω_0 est la pulsation de l'onde porteuse, ω celle de la modulation et k l'indice de modulation.

1 Si le signal s'exprime par

$$f(t) = A_0 \cos \phi(t)$$

où $\phi(t)$ est la phase, la pulsation instantanée est donnée par

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= \frac{d\phi(t)}{dt} = \Omega_0 + k\omega \cos(\omega t) \\ \Rightarrow \phi(t) &= \Omega_0 t + k \sin(\omega t) + \phi_0\end{aligned}$$

2 On peut écrire

$$\begin{aligned}f(t) &= A_0 \cos [\Omega_0 t + k \sin(\omega t) + \phi_0] = A_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\Omega_0 t + \phi_0 + k \sin(\omega t))} \right\} \\ &= A_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\Omega_0 t + \phi_0)} e^{ik \sin(\omega t)} \right\}\end{aligned}$$

On utilise la fonction génératrice des fonctions de Bessel

$$\begin{aligned}\exp \left[\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n J_n(x) \stackrel{z=e^{i\omega t}}{\Longrightarrow} e^{ix \sin(\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t} J_n(x) \\ \Rightarrow f(t) &= A_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\Omega_0 t + \phi_0)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t} J_n(k) \right\} \\ &= A_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k) \cos(n\omega t + \Omega_0 t + \phi_0)\end{aligned}$$

La différence de ce développement avec une série de Fourier est que la pulsation instantanée $n\omega + \Omega_0$ n'est pas directement proportionnelle à n ; si $\Omega_0 \neq m\omega$ ($m \in \mathbb{Z}$) la fonction n'est pas périodique de période $2\pi/\omega$.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

On voit dans ce problème une application de la fonction génératrice des fonctions de Bessel qui conduit ici à un développement simple d'un signal modulé en fréquence.

Problème 7.2

1 Préliminaire

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left[\frac{1}{2t} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right) u(t) \right] &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2t} \exp\left(-\frac{a^2}{4t} - pt\right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2t} \exp \left[-\frac{a\sqrt{p}}{2} \left(\frac{2t\sqrt{p}}{a} - \frac{a}{2t\sqrt{p}} \right) \right] dt\end{aligned}$$

on pose $\frac{2t\sqrt{p}}{a} = e^u \Rightarrow t = \frac{a}{2\sqrt{p}} e^u$ et $\frac{dt}{t} = du$ et $(0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left[\frac{1}{2t} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right) u(t) \right] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-a\sqrt{p} \cosh u] du = \int_0^{\infty} \exp [-a\sqrt{p} \cosh u] du \\ &= K_0(a\sqrt{p})\end{aligned}$$

2 Fil chauffant

a) La transformée de Laplace de l'équation est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \lambda^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \lambda^2 p U = 0$$

en tenant compte de la condition initiale $u(r, t = 0) = 0$.

b) $K_0(x)$ est solution de l'équation de Bessel modifiée $y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0$; $K_0(\alpha x)$ est solution de l'équation de Bessel modifiée $y'' + \frac{1}{x}y' - \alpha^2 y = 0$ (voir exercice 7.4); on en déduit que la solution de l'équation ci-dessus est de la forme

$$U(r, p) = A(p)K_0(\lambda r \sqrt{p}) + B(p)I_0(\lambda r \sqrt{p})$$

où I_0 est l'autre solution de l'équation de Bessel modifiée et où $A(p)$ et $B(p)$ sont des fonctions arbitraires. Le comportement asymptotique de $I_0(\lambda r \sqrt{p}) \sim \frac{e^{\lambda r \sqrt{p}}}{\sqrt{\lambda r \sqrt{p}}}$ est incompatible avec la condition : « $u(r, t)$ bornée $\Rightarrow U(r, p)$ bornée pour $r \rightarrow \infty$ » et donc $B(p) \equiv 0$.

c) On prend la transformée de Laplace de la condition de flux

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial u}{\partial r}(r, t) = -\phi_0 \xrightarrow{\mathcal{L}} \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\phi_0}{p}$$

Par ailleurs

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial U}{\partial r} = A(p) \lim_{r \rightarrow 0} (\lambda r \sqrt{p}) \frac{\partial}{\partial (\lambda r \sqrt{p})} K_0(\lambda r \sqrt{p}) = -A(p)$$

On en déduit

$$A(p) = \frac{\phi_0}{p}$$

d) On a donc :

$$U(r, p) = \frac{\phi_0}{p} K_0(\lambda r \sqrt{p}) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(r, t) = \phi_0 \int_0^t \frac{1}{2\xi} \exp\left(-\frac{\lambda^2 r^2}{4\xi}\right) d\xi \underset{u = \frac{\lambda^2 r^2}{4\xi}}{=} \frac{\phi_0}{2} E_1\left(\frac{\lambda^2 r^2}{4t}\right)$$

où E_1 est la fonction exponentielle intégrale (voir chapitre 1).

Ce qu'il faut retenir de ce problème

On retrouve de nouveau l'équation de la chaleur résolue cette fois-ci par transformation de Laplace. La représentation intégrale de la fonction de Bessel modifiée K_0 permet de prendre la transformation de Laplace inverse.

Problème 7.3

1 On injecte dans l'équation d'onde la forme pour $f : f(r, \theta, t) = g(r, \theta) \cos(\omega t - \varphi)$; on en déduit l'équation aux dérivées partielles dont g est solution

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} g$$

2 On cherche g sous la forme

$$g(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta$$

a) On a donc

$$\begin{aligned} a_0''(r) + \frac{1}{r} a_0'(r) + \frac{\omega^2}{c^2} a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n''(r) + \frac{1}{r} a_n'(r) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) a_n(r) \right] \cos n\theta \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n''(r) + \frac{1}{r} b_n'(r) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) b_n(r) \right] \sin n\theta = 0 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} a_0''(r) + \frac{1}{r} a_0'(r) + \frac{\omega^2}{c^2} a_0(r) &= 0 \\ a_n''(r) + \frac{1}{r} a_n'(r) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) a_n(r) &= 0 \quad \forall n \geq 1 \\ b_n''(r) + \frac{1}{r} b_n'(r) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) b_n(r) &= 0 \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

b) En faisant le changement de variable $z = \frac{\omega}{c} r$ (voir exercice 7.4) ces trois équations sont de la forme

$$y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} \right) y(z) = 0$$

qui est l'équation de Bessel d'indice entier n (avec $n = 0$ pour la première). Comme les fonctions $a_n(r)$ et $b_n(r)$ doivent être bornées, en particulier en $r = 0$, on en déduit

$$a_n(r) = A_n J_n\left(\frac{\omega}{c} r\right) \quad n \in \mathbb{N} \quad b_n(r) = B_n J_n\left(\frac{\omega}{c} r\right) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

où A_n et B_n sont des constantes arbitraires.

3 Pour satisfaire la condition $f(R, \theta, t) = 0 \Rightarrow g(R, \theta) = 0$ on doit avoir

$$\begin{aligned} g(R, \theta) &= a_0(R) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(R) \cos n\theta + b_n(R) \sin n\theta \equiv 0 \quad \forall \theta \\ \Rightarrow \forall n \quad A_n J_n\left(\frac{\omega}{c} R\right) &= 0 \text{ et } B_n J_n\left(\frac{\omega}{c} R\right) = 0 \end{aligned}$$

On a une infinité de façons de satisfaire cette infinité d'égalités : à chaque entier k on a une solution donnée par

$$A_n = B_n = 0 \quad \forall n \neq k$$

$$A_k \text{ et } B_k \text{ quelconques et } J_k\left(\frac{\omega}{c}R\right) = 0$$

La deuxième équation a là encore une infinité de solutions obtenues en choisissant $\frac{\omega}{c}R$ parmi l'infinité des zéros de J_k ce qui donne

$$\omega_{k,p} = z_p^{(k)} \frac{c}{R} \quad p = 1, 2, \dots$$

Les solutions élémentaires correspondantes sont donc de la forme

$$f_{k,p}(r, \theta, t) = J_k\left(z_p^{(k)} \frac{r}{R}\right) (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) \cos\left(z_p^{(k)} \frac{ct}{R} - \varphi\right)$$

et dépendent de deux entiers arbitraires k et p .

4 Dans un mode de vibration donné (k, p) les lignes nodales sont données par

$$f_{k,p}(r, \theta, t) = 0 \quad \forall t$$

c'est-à-dire

$$A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta = 0$$

$$\text{ou } J_k\left(z_p^{(k)} \frac{r}{R}\right) = 0$$

La première équation a pour solutions : $\tan k\theta = -\frac{A_k}{B_k} = \text{cste} \Rightarrow \theta_j = \theta_0 + j\frac{\pi}{k}$, $j = 0, 1, \dots, 2k - 1$. Les lignes nodales correspondantes sont donc k diamètres faisant entre eux un angle $\frac{\pi}{k}$.

La deuxième équation a pour solutions : $z_p^{(k)} \frac{r}{R} = z_q^{(k)}$ avec $q = 1, 2, \dots, p$. Les lignes nodales correspondantes sont donc les p cercles de rayon $r = R \frac{z_q^{(k)}}{z_p^{(k)}}$.

Les modes invariants par rotation sont ceux qui ne dépendent pas de θ . Ce sont donc les modes $k = 0$

$$f_{0,p}(r, \theta, t) = J_0\left(z_p^{(0)} \frac{r}{R}\right) \cos\left(z_p^{(0)} \frac{ct}{R} - \varphi\right)$$

Visualisation Maple (version 10 ou supérieure) du mode $k = 2, p = 1$ avec $R = 1, c = 1$:

```
with(plots)
addcoords(z_cylindrical, [z,r,theta], [r*cos(theta),r*sin(theta),z]);
animate(plot3d, [BesselJ(2,5.1356*r)*sin(2*theta)*cos(5.1356*t),
r=0..1,theta=0..2*Pi,coords=z_cylindrical,axes=BOXED], t=0..2);
```

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Ce problème décrit la résolution de l'équation d'onde à deux dimensions avec des conditions aux limites fermées : les modes de vibration sont décrits par les fonctions de Bessel.

Problème 7.4

1 Guide d'onde cylindrique métallique

a) $\Psi(\rho, z, t) = E_z(\rho)e^{i(kz - \omega t)}$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

En remplaçant on obtient

$$E_z'' + \frac{1}{\rho} E_z' + \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 \right] E_z = 0 \tag{7.13}$$

b) On pose $\delta = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)$. On en déduit d'après l'exercice 7.4 que la solution est de la forme

$$\begin{aligned} \delta > 0 &\implies E_z(\rho) = \alpha J_0(\rho\sqrt{\delta}) + \beta N_0(\rho\sqrt{\delta}) \\ \delta < 0 &\implies E_z(\rho) = \alpha I_0(\rho\sqrt{|\delta|}) + \beta K_0(\rho\sqrt{|\delta|}) \\ \delta = 0 &\implies E_z(\rho) = \alpha \ln \rho + \beta \end{aligned}$$

Les fonctions de Bessel modifiées n'ont pas de zéro et ne peuvent donc pas satisfaire la condition de continuité ; E_z ne peut pas être singulier ni constant ce qui exclut la fonction $\alpha \ln \rho + \beta$. On doit donc avoir $\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 > 0$. On pose $\gamma^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2$. La solution non singulière (en particulier en $\rho = 0$) est de la forme

$$E_z(\rho) = E_0 J_0(\gamma \rho)$$

où E_0 est une constante arbitraire.

c) Le champ électrique doit être nul sur la surface du guide : $E_z(\rho = a) = 0 \implies J_0(\gamma a) = 0$.

i) On en déduit que $\gamma a = z_p \implies \gamma_p = \frac{z_p}{a}$, $p = 1, 2, \dots$ où $\{z_p\}$ est la suite croissante des zéros de J_0 . On a donc une infinité de *modes de propagation* caractérisés par l'entier $p \geq 1$.

ii) On a donc $\gamma_p = \frac{z_p}{a} \Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 = \left(\frac{z_p}{a} \right)^2 \implies \frac{\omega}{c} \geq \frac{z_p}{a} \implies \omega \geq \omega_c^{(p)} = z_p \frac{c}{a}$. Pour que le mode p puisse se propager il faut donc que la pulsation de l'onde électromagnétique satisfasse cette condition. La constante de propagation de ce mode est alors donnée par l'expression

$$k_p = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \left(\omega_c^{(p)} \right)^2}$$

En particulier si $\omega < \omega_c^{(1)} = z_1 \frac{c}{a} = 2.405 \frac{c}{a} = \omega_c$ aucun mode ne se propage. D'où le nom de *pulsation de coupure* donné à ω_c . Si $\omega_c \leq \omega < \omega_c^{(2)}$ seul le mode $p = 1$ se propage. Si $\omega_c^{(2)} \leq \omega < \omega_c^{(3)}$ les modes $p = 1$ et $p = 2$ se propagent, et ainsi de suite.

d) La composante transverse est donnée par

$$E_T(\rho) = \frac{ik}{\gamma^2} \frac{\partial E_z(\rho)}{\partial \rho} = \frac{ik}{\gamma^2} E_0 \gamma J'_0(\gamma \rho) = -\frac{ik}{\gamma} E_0 J_1(\gamma \rho)$$

2 Modes de propagation dans une fibre optique

a) E_{1z} et E_{2z} (B_{1z} et B_{2z}) sont solutions de $F''(\rho) + \frac{1}{\rho} F'(\rho) + (\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2) F(\rho) = 0$ où on a remplacé dans l'équation 7.13 la célérité c par $\frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$ dans un milieu d'indice $n = \sqrt{\epsilon}$.

- Dans la gaine le champ doit être rapidement amorti dans la direction transverse : $E_{1z}(\rho)$ (ou $B_{1z}(\rho)$) $\simeq e^{-\rho}$. On doit donc avoir une équation de Bessel modifiée $\Rightarrow \epsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$ et la solution retenue est celle qui est décroissante (K_0 et non pas I_0).

- Dans le cœur, au contraire, il ne doit pas y avoir d'amortissement transverse ; on doit avoir une équation de Bessel ordinaire $\Rightarrow \epsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$. De plus le champ est une fonction bornée $\forall \rho \leq a$ en particulier en $\rho = 0$; la solution retenue est donc J_0 et non pas N_0 .

$$\begin{aligned} \text{Gaine } \rho > a \quad E_{1z}(\rho) &= A_1 K_0(\beta \rho) \quad B_{1z}(\rho) = C_1 K_0(\beta \rho) \quad \text{avec } \beta = \sqrt{k^2 - \epsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2}} \\ \text{cœur } \rho \leq a \quad E_{2z}(\rho) &= A_2 J_0(\gamma \rho) \quad B_{2z}(\rho) = C_2 J_0(\gamma \rho) \quad \text{avec } \gamma = \sqrt{\epsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \end{aligned}$$

où A_1, A_2, C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

b) Pour les **modes TE** : $E_z = 0$ ($A_1 = A_2 = 0$) $\Rightarrow B_\varphi = E_\rho = 0$; les composantes transverses sont données par

$$\begin{aligned} B_{1\rho} &= -\frac{ik}{\beta^2} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \rho} & B_{2\rho} &= \frac{ik}{\gamma^2} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \rho} \\ E_{1\varphi} &= -\frac{\omega}{ck} B_{1\rho} & E_{2\varphi} &= -\frac{\omega}{ck} B_{2\rho} \end{aligned}$$

En remarquant que $J'_0 = -J_1$ et $K'_0 = -K_1$

$$\begin{aligned} \text{Gaine } \rho > a \quad B_{1\rho} &= \frac{ik}{\beta} C_1 K_1(\beta \rho) & E_{1\varphi} &= -\frac{i\omega}{\beta c} C_1 K_1(\beta \rho) \\ \text{cœur } \rho \leq a \quad B_{2\rho} &= -\frac{ik}{\gamma} C_2 J_1(\gamma \rho) & E_{2\varphi} &= \frac{i\omega}{\gamma c} C_2 J_1(\gamma \rho) \end{aligned}$$

c) Les conditions de continuité des composantes tangentielles des champs en $\rho = a$ se traduisent par

$$\begin{aligned} B_{1z}(a) &= B_{2z}(a) \Rightarrow C_1 K_0(\beta a) = C_2 J_0(\gamma a) \\ E_{1\varphi}(a) &= E_{2\varphi}(a) \Rightarrow -\frac{i\omega}{\beta c} C_1 K_1(\beta a) = \frac{i\omega}{\gamma c} C_2 J_1(\gamma a) \end{aligned}$$

Chapitre 7 • Fonctions de Bessel

En faisant le rapport membre à membre on élimine les constantes arbitraires et on obtient pour la constante de propagation k la contrainte :

$$\frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)} = -\frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)}$$

On définit

$$x = \beta a = a\sqrt{k^2 - \epsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2}} \quad y = \gamma a = a\sqrt{\epsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \quad x^2 + y^2 = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{\omega^2 a^2}{c^2} = q^2$$

La contrainte se reformule

$$\frac{J_1(x)}{x J_0(x)} = -\frac{K_1(y)}{y K_0(y)} \Big|_{y=\sqrt{q^2-x^2}}$$

- d)** Les fonctions K_0 et K_1 sont positives. Les fonctions $J_0(x)$ et $J_1(x)$ varient (dans ce tableau $\xi_1 = 2,405$ est le premier zéro de J_0 , $\eta_1 = 3,832$ le premier zéro de J_1 et $\xi_2 = 5,520$ le deuxième zéro de J_0).

x	0	ξ_1	η_1	ξ_2
$J_0(x)$	1	positif	0	négatif
$J_1(x)$	0	positif	positif	0

k est contraint à rester dans l'intervalle $\left[\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1}, \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_2} \right]$ ce qui entraîne pour x et y

$$\begin{array}{ccc} k & \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1} & \nearrow \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_2} \\ x & q & \searrow 0 \\ y & 0 & \nearrow q \end{array}$$

On peut visualiser l'apparition des modes par une analyse graphique de l'équation.

La figure 7.3 représente $\frac{J_1(x)}{x J_0(x)}$ en trait plein et $-\frac{K_1(y)}{y K_0(y)} \Big|_{y=\sqrt{q^2-x^2}}$ en trait pointillé, pour $q = 5$.

En faisant varier q on déplace la droite verticale, asymptote de $-\frac{K_1(y)}{y K_0(y)}$. Il apparaît clairement que pour $q < \xi_1$ la courbe pointillée et la courbe pleine ne se coupent pas : il n'y a pas de solution. Si $q \geq \xi_1$ alors $\frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)}$ devient négatif et une solution apparaît. En d'autres termes pour $\omega < \omega_c = \xi_1 \frac{c}{a\sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}}$ il n'y a pas de propagation. Pour $\omega > \omega_c$ les modes TE apparaissent. Le graphique de la figure 7.3 indique que le second mode apparaît pour $q \geq \xi_2$

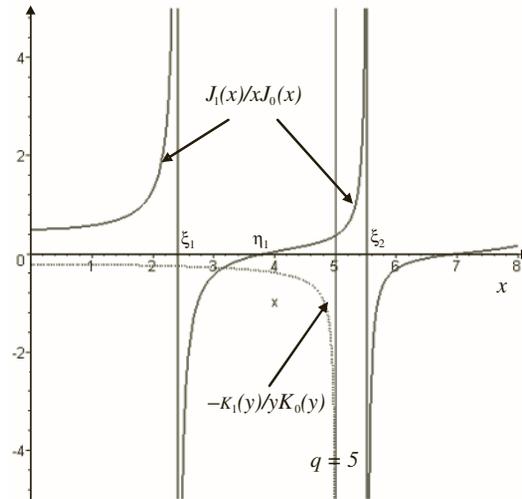


Figure 7.3

Ce qu’il faut retenir de ce problème

De nouveau l’équation d’onde, mais à trois dimensions en milieu semi-infini cylindrique : les modes de propagation des ondes électromagnétiques sont décrits par les fonctions de Bessel. Dans les deux questions remarquer le rôle fondamental du résultat de l’exercice 7.4 qui conduit à sélectionner la forme de la solution du problème et les modes de propagation selon les conditions aux limites.

Problème 7.5

1 On effectue le changement de variable dans l’intégrale de Fourier ; on a

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = kr (\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi) = kr \sin(\phi + \theta)$$

et

$$G(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \tilde{G}(k, \phi) \quad ; \quad g(x_1, x_2) \rightarrow \tilde{g}(r, \theta)$$

$$\tilde{G}(k, \phi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ikr \sin(\phi+\theta)} \tilde{g}(r, \theta) r dr d\theta \quad ; \quad \tilde{g}(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ikr \sin(\phi+\theta)} \tilde{G}(k, \phi) k dk d\phi$$

2 On prend $\tilde{g}(r, \theta) = e^{in\theta} f(r)$ où $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} \tilde{G}(k, \phi) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ikr \sin(\phi+\theta)} e^{in\theta} f(r) r dr d\theta \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^{2\pi} e^{-ikr \sin(\phi+\theta)} e^{in\theta} d\theta \right\} f(r) r dr \end{aligned}$$

a) On note $I_n(\phi)$ l'intégrale

$$I_n(\phi) = \int_0^{2\pi} e^{-ikr \sin(\phi+\theta)} e^{in\theta} d\theta \stackrel{u=\phi+\theta}{=} e^{-in\phi} \int_\phi^{2\pi+\phi} e^{-ikr \sin(u)} e^{inu} du$$

La fonction $e^{-ikr \sin(u)} e^{inu}$ est 2π -périodique, donc l'intégrale $\int_\phi^{2\pi+\phi} e^{-ikr \sin(u)} e^{inu} du$ ne dépend pas de ϕ et elle est égale à $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin(u)} e^{inu} du = 2\pi J_n(x)$ (voir représentation intégrale dans le rappel de cours); donc

$$I_n(\phi) = 2\pi e^{-in\phi} J_n(kr)$$

b) On en déduit

$$\begin{aligned} \tilde{G}(k, \phi) &= \int_0^\infty I_n(\phi) f(r) r dr = 2\pi e^{-in\phi} \int_0^\infty J_n(kr) f(r) r dr = 2\pi e^{-in\phi} F(k) \\ \text{avec } F(k) &= \int_0^\infty r J_n(kr) f(r) dr \end{aligned}$$

3 On écrit que \tilde{g} est la transformée de Fourier inverse de \tilde{G} :

$$\begin{aligned} \tilde{g}(r, \theta) &= e^{in\theta} f(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ikr \sin(\phi+\theta)} \tilde{G}(k, \phi) k dk d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ikr \sin(\phi+\theta)} e^{-in\phi} d\phi \right\} F(k) k dk \end{aligned}$$

L'intégrale entre { } n'est rien d'autre que $\overline{I_n}(\theta) = 2\pi e^{in\theta} J_n(kr)$. On en déduit

$$f(r) = \int_0^\infty J_n(kr) F(k) k dk$$

4 La transformée de Laplace de J_0 a été calculée dans l'exercice 7.6; le résultat est

$$\mathcal{L}\{J_0\} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

En utilisant la propriété de la transformation de Laplace $\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$ on déduit la transformée de Laplace par rapport à k de $J_0(kr)$ ($r > 0$)

$$\mathcal{L}_k\{J_0(kr)\} = \frac{1}{\sqrt{r^2+p^2}}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + p^2}} = \int_0^\infty J_0(kr)e^{-pk} dk = \int_0^\infty J_0(kr)\frac{e^{-pk}}{k} k dk$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + p^2}} = \mathcal{H}_0^{-1}\left(\frac{e^{-pk}}{k}\right) \Rightarrow \mathcal{H}_0\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right\} = \frac{e^{-ak}}{k}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

La transformation de Hankel est utilisée pour résoudre des problèmes de potentiel en coordonnées cylindriques.

8

FONCTIONS ORTHOOGONALES

RAPPELS DE COURS

L'espace \mathcal{L}^2 est l'espace vectoriel des fonctions de carré sommable :

$$f \in \mathcal{L}^2 \iff \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \text{ bornée}$$

Ces fonctions modélisent les signaux d'énergie finie.

On définit de façon plus générale $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ qui est l'espace vectoriel des fonctions de carré sommable sur l'intervalle $[a, b]$ par rapport à la mesure $d\mu = w(t)dt$ où w est une fonction définie continue sur $[a, b]$, positive sur $]a, b[$ appelée *fonction de poids*.

$$f \in \mathcal{L}_w^2(a, b) \iff \int_a^b w(t) |f(t)|^2 dt \text{ bornée}$$

On a donc $\mathcal{L}^2 \equiv \mathcal{L}_1^2(\mathbb{R})$.

Ces espaces vectoriels sont des espaces de Hilbert :

- on peut y définir une *norme*

$$f \in \mathcal{L}_w^2(a, b) \Rightarrow \|f\| = \left[\int_a^b |f(t)|^2 w(t) dt \right]^{1/2}$$

- la *convergence* d'une suite : $\{f_n\}$ converge vers f dans $\mathcal{L}_w^2(a, b)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 \iff \forall \epsilon \exists N(\epsilon) \text{ tel que}$$
$$n \geq N \Rightarrow \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 w(t) dt \leq \epsilon$$

- on peut définir un *produit scalaire hermitien*

$$(f, g) = \int_a^b w(t) \overline{f(t)} g(t) dt$$

- et une base dénombrable orthonormée $\{\phi_n\}$:

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad (\phi_n, \phi_m) = \delta_{nm}$$

$$\forall f \in \mathcal{L}_w^2(a, b) \quad \exists \{\alpha_n\} \ (\alpha_n \in \mathbb{C}) \text{ tel que } f = \sum_n \alpha_n \phi_n$$

$$\alpha_n = (\phi_n, f)$$

La relation $f = \sum_n \alpha_n \phi_n$ signifie $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b w(t) \left| f(t) - \sum_{k=0}^n \alpha_k \phi_k(t) \right|^2 dt = 0$.

- *Relations de Plancherel et de Parseval*

$$\begin{aligned} f = \sum_n \alpha_n \phi_n \quad g = \sum_n \beta_n \phi_n &\Rightarrow (f, g) = \sum_n \overline{\alpha_n} \beta_n \quad (\text{Plancherel}) \\ &\Rightarrow \|f\|^2 = \sum_n |\alpha_n|^2 \quad (\text{Parseval}) \end{aligned} \quad (8.1)$$

ÉNONCÉS DES PROBLÈMES

Problème 8.1 La base de Fourier

On se place dans l'espace $\mathcal{L}^2(0, T)$ c'est-à-dire l'espace $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ avec $w(t) \equiv 1$ et $[a, b] = [0, T]$. On pose $\omega = 2\pi/T$.

- 1 Montrer que les fonctions

$$\phi_n : t \mapsto \phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega t} \quad n \in \mathbb{Z}$$

forment une suite orthonormée dans $\mathcal{L}^2(0, T)$.

- 2 On admettra que cet ensemble constitue une *base* dans $\mathcal{L}^2(0, T)$. Exprimer les coefficients $\{\alpha_n\}$ de la décomposition de f sur cette base.
- 3 Les fonctions T -périodiques et qui satisfont le critère de Dirichlet sont dans $\mathcal{L}^2(0, T)$; quelle relation existe-t-il entre les coefficients $\{\alpha_n\}$ et les coefficients de Fourier complexes $\{c_n\}$?
- 4 À partir de la relation de Parseval $\|f\|^2 = \sum_n |\alpha_n|^2$ retrouver la relation de Parseval liant les coefficients de Fourier et la fonction f .
- 5 On considère la fonction $f : t \mapsto f(t) = |\sin(\pi t)|$.
 - a) Vérifier que $f \in \mathcal{L}^2(0, T)$.
 - b) Écrire le développement de Fourier de f et la relation de Parseval. Que peut-on en déduire ?

Problème 8.2 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

On définit la suite des monômes : $u_n : x \rightarrow u_n(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$.

1 On se place dans l'espace $\mathcal{L}^2(-1, 1)$.

a) Montrer que les fonctions u_n sont bien dans $\mathcal{L}^2(-1, 1)$.

b) La suite $\{u_n\}$ est-elle orthogonale ?

2 On construit la suite $\{P_n\}$ de polynômes orthogonaux dans $\mathcal{L}^2(-1, 1)$ (ces polynômes sont les polynômes de **Legendre**) par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt qui est une construction par récurrence.

a) On part de P_0 de degré 0 :

$$P_0(x) = 1$$

puis on construit P_1 (de degré 1) par

$$P_1(x) = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_0 P_0(x)$$

où les coefficients α_0 et α_1 sont déterminés à partir de la *condition d'orthogonalité*

$$(P_0, P_1) = 0$$

et de la *condition de standardisation*

$$P_1(1) = 1$$

Déterminer explicitement le polynôme $P_1(x)$.

b) On généralise le processus : supposons qu'on ait déjà déterminé $\{P_k\}, k = 0, 1, \dots, n-1$. On cherche P_n sous la forme

$$P_n(x) = \alpha_n u_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x)$$

Les coefficients $\{\alpha_k\}, k = 0, 1, \dots, n$ sont déterminés en imposant l'orthogonalité de P_n avec $\{P_k\}, k = 0, 1, \dots, n-1$ ce qui fait n équations. La dernière équation est la condition de standardisation, ici $P_n(1) = 1$.

Déterminer explicitement les polynômes P_2 et P_3 selon ce schéma.

3 On va appliquer le processus de la question précédente pour construire la famille de polynômes $\{p_n\}$ orthogonaux dans $\mathcal{L}_w^2(a, b)$; supposons qu'on ait déjà déterminé $\{p_k\}, k = 0, 1, \dots, n-1$. On cherche p_n sous la forme

$$p_n(x) = \alpha_n u_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k(x)$$

a) Montrer que

$$\alpha_k = -\frac{(u_n, p_k)}{\|p_k\|^2} \alpha_n \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Le polynôme p_n est maintenant défini à une constante multiplicative près (α_n par exemple) qui est déterminée par la condition de standardisation (par exemple $P_n(1) = 1$ dans le cas des polynômes de Legendre).

b) Dédurre de la question précédente que si la fonction de poids w est paire et que l'intervalle (a, b) est symétrique par rapport à 0, alors les polynômes p_n sont de parité $(-1)^n$ (c'est le cas des polynômes de Legendre P_n).

4 On va construire trois familles usuelles de polynômes formant des bases orthogonales dans des espaces $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ dont les caractéristiques sont données dans la table ci-dessous (dans laquelle on a rappelé pour mémoire l'espace de Legendre étudié à la question 2).

p_n	$w(x)$	(a, b)	Standardisation
Legendre P_n	1	$[-1, 1]$	$P_n(1) = 1$
Hermite H_n	e^{-x^2}	$]-\infty, \infty[$	coefficient directeur de $H_n = 2^n$
Tchebychev T_n	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$	coefficient directeur de $T_n = 2^{n-1}$, $n \geq 1$ et $T_0 = 1$
Laguerre L_n	e^{-x}	$[0, \infty[$	$L_n(0) = 1$

Pour chaque famille construire les premiers polynômes (jusqu'à $n = 3$) et calculer leur norme.

Pour cette dernière question on pourra utilement calculer au préalable, pour $n \in \mathbb{N}$, les trois intégrales

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx \quad ; \quad J_n = \int_{-1}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad ; \quad K_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

Problème 8.3 Théorème à propos des polynômes

Etablir que si $Q_N(x)$ est un polynôme *quelconque* de degré N et $\{p_n\}$ la base de polynômes orthogonaux dans $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ alors

$$(Q_N, p_k) = 0 \quad \forall k > N$$

Problème 8.4 Orthogonalité et équation différentielle

Chacune des quatre familles de polynômes définies dans le problème précédent est issue d'une équation différentielle du second ordre de la forme

$$\sigma(x)y'' + q(x)y' + \lambda_n y = 0 \tag{8.2}$$

Chapitre 8 • Fonctions orthogonales

où σ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, q est un polynôme de degré 1 et λ_n une suite numérique monotone sur \mathbb{N} . De façon explicite :

p_n		$\sigma(x)$	$q(x)$	λ_n
Legendre	P_n	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n + 1)$
Hermite	H_n	1	$-2x$	$2n$
Tchebychev	T_n	$1 - x^2$	$-x$	n^2
Laguerre	L_n	x	$1 - x$	n

Nous allons établir que ces familles de polynômes jouissent d'un ensemble de propriétés communes qui résultent de la forme de l'équation différentielle.

- 1 Déterminer, pour chaque famille $\{p_n\}$ les fonctions ρ et w telles que l'équation (8.2) puisse se mettre sous la forme (appelée *forme de Sturm*)

$$\frac{d}{dx}[\rho(x)p_n'(x)] + \lambda_n w(x)p_n(x) = 0 \quad (E_n)$$

Vérifier dans chaque cas que :

- la fonction ρ est continue et satisfait $\rho(a) = \rho(b) = 0$ où $[a, b]$ est l'intervalle de définition de la famille considérée ;
- la fonction w est définie continue sur $[a, b]$ et strictement positive sur $]a, b[$.

- 2 *Orthogonalité* : En calculant $\int_a^b \{p_n \times (E_m) - p_m \times (E_n)\} dx$ établir la relation d'orthogonalité

$$\int_a^b w(x)p_n(x)p_m(x) = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

- 3 *Formule de Rodrigues* : En dérivant k fois l'équation (8.2) pour $k \in [0, n]$ et en mettant sous forme de Sturm l'équation obtenue pour $p_m^{(k)}$ établir

$$p_n(x) = \frac{A_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [w(x)\sigma^n(x)]$$

où A_n est une constante caractéristique de la famille considérée.

- 4 *Relation de récurrence*

a) Établir que

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k p_k(x)$$

b) Montrer que $\alpha_k \equiv 0$ pour $k < n - 1$.

c) En déduire la relation de récurrence

$$p_{n+1}(x) = (a_n + b_n x)p_n(x) + c_n p_{n-1}(x)$$

où les coefficients a_n , b_n et c_n se déduisent des α_n .

5 Les zéros de p_n sont tous réels et dans $]a, b[$

a) Montrer que p_n ($n > 0$) change au moins une fois de signe dans $]a, b[$.

b) Supposons que p_n change k fois de signe dans $]a, b[$ (avec $k \leq n$) et désignons par x_1, x_2, \dots, x_k les positions de ces changements de signe (zéros de p_n). On construit le polynôme $Q_k(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k)$. De l'évaluation du produit scalaire (Q_k, p_n) comment déduire que nécessairement $k = n$?

Que conclure ?

Problème 8.5 Application des polynômes de Tchebychev à l'optimisation de filtres fréquentiels

Un filtre passe-bas idéal a un gain de G_0 pour $\nu < \nu_c$ (fréquence de coupure) et de 0 pour $\nu > \nu_c$. Le théorème de Paley-Wiener nous dit qu'un filtre idéal ne peut pas exister. Un filtre réel est donc une approximation de ce gabarit idéal (voir figure 8.1) pour lequel le gain est le plus proche possible de G_0 dans la bande passante, passe le plus rapidement possible de G_0 à 0 autour de la fréquence de coupure (bande de transition) et est le plus proche possible de zéro au-delà (bande atténuée).

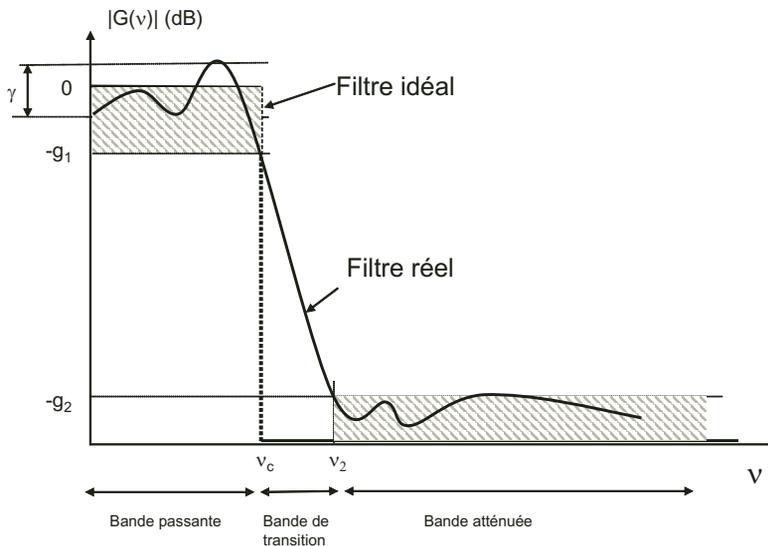


Figure 8.1

Chapitre 8 • Fonctions orthogonales

Il y a donc de multiples façons d'optimiser le filtre réel pour approcher le gabarit idéal. Le filtre de Tchebychev est celui qui, pour un ordre donné n , réalise la meilleure approximation du gabarit dans la bande passante (en un sens qui est précisé ci-dessous). Nous allons le montrer.

Pour cela, nous définissons la fonction f par

$$|G(\nu)|^2 = \frac{G_0^2}{1 + |f(\frac{\nu}{\nu_c})|^2}$$

où

	Filtre idéal		Filtre approché
$f(x)$	= 0 pour $ x < 1$	$f(x)$	$\simeq 0$ pour $ x < 1$
	= ∞ pour $ x > 1$		$\gg 1$ pour $ x > 1$

Pour un filtre d'ordre n la fonction f est un polynôme de degré n . Si on veut optimiser le filtre dans la bande passante il faut trouver dans l'ensemble \mathcal{P} des polynômes de degré exactement égal à n celui qui approche le mieux zéro (au sens de la convergence uniforme) pour $x \in [-1, 1]$, c'est-à-dire celui qui rend minimal la quantité

$$\mathcal{M}(p) = \max_{x \in [-1, 1]} |p(x)| \quad (8.3)$$

On rappelle (voir problème 8.4) que les polynômes de Tchebychev forment une base orthogonale dans $\mathcal{L}_w^2(-1, 1)$ avec $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et qu'ils sont solution de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} (1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n &= 0 \\ T_n(1) &= 1 \end{aligned}$$

1 On fait le changement de variable $x = \cos \theta$ dans l'équation différentielle

a) Établir que

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \quad (8.4)$$

b) Retrouver l'expression des premiers polynômes.

c) Quels sont les zéros et les extrema de $T_n(x)$?

d) Établir la relation de récurrence $T_{n-1} + T_{n+1} = 2xT_n$ et en déduire que pour $n \geq 1$ le coefficient directeur de T_n est 2^{n-1} .

2 On note $\widehat{\mathcal{P}}$ l'ensemble des polynômes de degré exactement égal à n ($n > 0$) et de coefficient directeur égal à 1. On définit $\widehat{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$. On a donc $\widehat{T}_n \in \widehat{\mathcal{P}}$.

a) Calculer $\mathcal{M}(\widehat{T}_n)$ ou \mathcal{M} est défini dans l'équation (8.3).

b) Soit $p \in \widehat{\mathcal{P}}$, $p \neq \widehat{T}_n$. Supposons que $\mathcal{M}(p) < \mathcal{M}(\widehat{T}_n)$. On définit le polynôme $q = \widehat{T}_n - p$.

i) Déterminer le degré de q .

ii) Déterminer le signe de $q(\cos k \frac{\pi}{n})$ pour $k = 0$ à n .

iii) En déduire qu'il ne peut pas exister de polynôme $p \in \widehat{\mathcal{P}}$ tel que $\mathcal{M}(p) < \mathcal{M}(\widehat{T}_n)$.

Le filtre de Tchebychev est obtenu en prenant $f = \epsilon \widehat{T}_n$ où ϵ est un paramètre ajustable. C'est donc le filtre d'ordre n qui s'écarte le moins possible du gabarit idéal sur l'intervalle $[-1, 1]$

Problème 8.6 Base orthogonale et fonctions de Bessel

La fonction J_0 a une infinité de zéros réels positifs non dégénérés. On désigne par $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ cette suite. On construit une famille de fonctions $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ définies par $u_k(x) = J_0(z_k x)$.

1 Écrire l'équation différentielle (E_k) dont u_k est solution.

2 En intégrant entre 0 et 1 la combinaison d'équation $u_k \times (E_l) - u_l \times (E_k)$ montrer que

$$\int_0^1 x u_k(x) u_l(x) dx = N_k \delta_{kl} \quad \text{où } N_k = \int_0^1 x |u_k(x)|^2 dx$$

Cela établit que cette famille constitue une *suite orthogonale* sur $(0,1)$ avec fonction de poids x .

3 Nous allons déterminer la valeur de $N_k = \|u_k\|^2$.

a) Montrer que $\int_0^1 x [u_k(x)]^2 dx = \lim_{\alpha \rightarrow z_k} \left\{ \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{\beta J_0(\alpha) J_0'(\beta) - \alpha J_0(\beta) J_0'(\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2} \right\}$.

b) À l'aide d'un développement pour $\beta \sim \alpha$, établir que l'expression entre $\{ \}$ ci-dessus peut s'écrire $\frac{1}{2} (J_0'(\alpha))^2 - \frac{1}{2\alpha} J_0(\alpha) J_0'(\alpha) - \frac{1}{2} J_0(\alpha) J_0''(\alpha)$.

c) En déduire que $N_k = \frac{1}{2} (J_0'(z_k))^2 = \frac{1}{2} (J_1(z_k))^2$.

La famille de fonctions $\{u_k\}$ constitue une base orthogonale dans l'espace des fonctions réelles de carré sommable sur $(0,1)$ avec fonction de poids $w(x) = x$. On aura donc pour une fonction de cet espace

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \quad \text{où } c_k = \frac{(u_k, f)}{N_k} = \frac{1}{N_k} \int_0^1 x u_k(x) f(x) dx$$

(voir problème de potentiel 9.9). Remarque : chaque fonction de Bessel J_n permet d'engendrer une base orthogonale $u_k^{(n)}(x) = J_n(z_k^{(n)} x)$ où les $\{z_k^{(n)}\}$ $k = 1, 2, \dots$ est la suite des zéros de J_n . Ces bases sont toutes indépendantes.

Problème 8.7 Propriétés des polynômes de Legendre

On rappelle que les polynômes de Legendre sont représentés par la formule de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n] \quad (8.5)$$

En déduire :

1 que les P_n ont la parité $(-1)^n$;

Chapitre 8 • Fonctions orthogonales

2 que le coefficient directeur de P_n est donné par : $\alpha_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$;

3 que le terme constant est donné par

$$\begin{aligned} P_n(0) &= (-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n (n/2)!} \text{ pour } n \text{ pair} \\ &= 0 \text{ pour } n \text{ impair} \end{aligned}$$

4 que la norme des P_n est donnée par : $\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$;

5 que

$$\int_0^1 P_{2k+1}(x) dx = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} k!(k+1)!}$$

6 que la relation de récurrence s'exprime par $(2n+1)xP_n = nP_{n-1} + (n+1)P_{n+1}$.

DU MAL À DÉMARRER ?

Problème 8.1

Le produit scalaire est défini par $(\phi_n, \phi_m) = \int_0^T \overline{\phi_n(t)} \phi_m(t) dt$. Ensuite se laisser guider par le formalisme rappelé en début de chapitre.

Problème 8.2

3 Utiliser l'orthogonalité : $(p_n, p_k) = 0$ si $k \neq n$.

4 Calcul des normes ; on rappelle $\|p_n\|^2 = \int_a^b w(x) p_n^2(x) dx$.

Problème 8.3

Un polynôme de base de degré n est une combinaison de monômes de puissance $\leq n$; montrer qu'inversement un monôme est une combinaison finie de polynômes de base. On en déduit le résultat.

Problème 8.4

1 Identifier l'équation (E_n) à l'équation standard multipliée par une fonction inconnue w .

3 L'équation pour $p_n^{(k)}$ sera évaluée de façon récurrente pour k décroissant de $n-1$ à 1.

4 Utiliser $(xP, Q) = (P, xQ)$ et le résultat du problème 8.3.

5 Rappelons que si f continue, non identiquement nulle, est telle que $\int_a^b f(x) dx = 0$ alors f change au moins une fois de signe dans $]a, b[$.

Problème 8.5

1 (a) On montrera que $\sin(n\theta)$ n'est pas un polynôme en $\cos \theta$.

2 (b) Compter les changements de signe du polynôme q .

Problème 8.6

Pour **1** utiliser le résultat de l'exercice 7.4.

Pour **3** (a) il faut utiliser la même méthode que pour **1** et **2** en remplaçant $u_k(x) = J_0(z_k x)$ par $u_\alpha(x) = J_0(\alpha x)$. Pour **3** (b) on pose $\beta = \alpha + \epsilon$ et on fait un développement au 1^{er} ordre en ϵ .

Problème 8.7

3 Utiliser la formule de Leibniz (voir chapitre 1).

4 Dans l'intégrale qui définit $\|P_n\|^2$ remplacer P_n^2 par $P_n \times \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n]$ et intégrer par parties.

Corrigés des problèmes

Problème 8.1

On se place dans l'espace $\mathcal{L}^2(0, T)$ correspondant à $w(t) \equiv 1$ et $[a, b] = [0, T]$. On pose $\omega = 2\pi/T$.

1 Soit la famille de fonctions

$$\phi_n : t \mapsto \phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega t} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Etablissons que ces fonctions sont orthonormées :

$$\begin{aligned} n \neq m \Rightarrow (\phi_n, \phi_m) &= \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-in\omega t} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{im\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(m-n)\omega t} dt \\ &= \frac{1}{(m-n)\omega T} e^{i(m-n)\omega t} \Big|_0^T = 0 \text{ puisque } \omega T = 2\pi \\ n = m \Rightarrow (\phi_n, \phi_n) &= \|\phi_n\|^2 = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-in\omega t} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

2 La fonction f se décompose sur la base orthonormée $\{\phi_n\}$

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{L}^2(0, T) \implies f &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \phi_n \\ \alpha_n &= (\phi_n, f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T e^{-in\omega t} f(t) dt \end{aligned}$$

3 Les fonctions T -périodiques satisfaisant le critère de Dirichlet sont dans $\mathcal{L}^2(0, T)$; les coefficients de Fourier de f sont reliés aux α_n :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-in\omega t} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \alpha_n$$

4 Appliquons la relation de Parseval, équation 8.1 :

$$\|f\|^2 = \sum_n |\alpha_n|^2 \Rightarrow \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_n |\alpha_n|^2 = \sum_n |\sqrt{T} c_n|^2$$

On retrouve bien la relation de Parseval des séries de Fourier (chapitre 1)

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

5 On considère la fonction $f : t \rightarrow f(t) = |\sin(2\pi t)|$.

a) On vérifie que

$$\|f\|^2 = \int_0^1 |\sin(2\pi t)|^2 dt = \frac{1}{2} < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}^2(0, 1)$$

b) Écrivons le développement de Fourier de f

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 e^{-in2\pi t} |\sin(2\pi t)| dt = \int_0^{1/2} e^{-in2\pi t} \sin(2\pi t) dt - \int_{1/2}^1 e^{-in2\pi t} \sin(2\pi t) dt \\ &= \frac{1}{2i} \left[\int_0^{1/2} e^{-i(n-1)2\pi t} dt - \int_0^{1/2} e^{-i(n+1)2\pi t} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{1/2}^1 e^{-i(n-1)2\pi t} dt + \int_{1/2}^1 e^{-i(n+1)2\pi t} dt \right] \\ &= \frac{1 - (-1)^{n+1}}{4\pi} \left[-\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right] = -\frac{1 - (-1)^{n+1}}{\pi} \frac{1}{n^2 - 1} \quad |n| \neq 1 \\ c_{2k} &= -\frac{2}{\pi} \frac{1}{4k^2 - 1} \quad ; \quad c_{2k+1} = 0 \end{aligned}$$

On déduit de l'égalité de Parseval

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_0^1 |\sin(2\pi t)|^2 dt = \frac{1}{2} \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 &= \frac{4}{\pi^2} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} \right] \\ &\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Les séries de Fourier apparaissent comme des développements sur une base orthogonale. La convergence en moyenne quadratique de la série mise en avant dans l'étude des séries de Fourier est simplement la convergence en norme dans l'espace $\mathcal{L}^2(0, T)$.

Problème 8.2

On définit la suite des monômes : $u_n : x \rightarrow u_n(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$.

1 On se place dans l'espace $\mathcal{L}^2(-1, 1)$.

a) On a $\|u_n\|^2 = \int_{-1}^1 x^{2n} dx = \frac{2}{2n+1} < \infty \Rightarrow$ la suite $\{u_n\}$ est dans $\mathcal{L}^2(-1, 1)$.

b) La suite $\{u_n\}$ n'est pas orthogonale :

$$(u_n, u_m) = \int_{-1}^1 x^{n+m} dx = \frac{1}{n+m+1} [1 - (-1)^{m+n+1}] \neq 0 \text{ si } m+n \text{ est pair.}$$

2 Construction de la suite $\{P_n\}$, où n est le degré du polynôme, avec $P_n(1) = 1 \Rightarrow P_0(x) = 1$.

a) Détermination du polynôme $P_1(x) = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_0 P_0$.

$$\left. \begin{array}{l} (P_0, P_1) = 0 \quad \int_{-1}^1 (\alpha_1 x + \alpha_0) dx = 2\alpha_0 = 0 \quad \alpha_0 = 0 \\ P_1(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \alpha_1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow P_1(x) = x$$

b) Détermination des polynômes P_2 et P_3 .

Commençons par $P_2(x) = \alpha_2 u_2(x) + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_0 P_0(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} (P_0, P_2) = 0 \quad \alpha_2 \int_{-1}^1 x^2 dx + \alpha_0 \int_{-1}^1 dx = 0 \quad \frac{2}{3}\alpha_2 + 2\alpha_0 = 0 \\ (P_1, P_2) = 0 \quad \alpha_2 \int_{-1}^1 x^3 dx + \alpha_1 \int_{-1}^1 x^2 dx = 0 \quad 2\alpha_1 = 0 \\ P_2(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \alpha_2 + \alpha_0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Détermination du polynôme $P_3(x) = \alpha_3 u_3(x) + \alpha_2 P_2(x) + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_0 P_0(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} (P_0, P_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = 0 \\ (P_1, P_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5}\alpha_3 + \frac{2}{3}\alpha_1 = 0 \\ (P_2, P_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 0 \\ P_3(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 + \alpha_1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

3 On se place maintenant dans l'espace $\mathcal{L}_w^2(a, b)$; on cherche p_n de la forme

$$p_n(x) = \alpha_n u_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k(x) \tag{8.6}$$

a) On a :

$$\begin{aligned} (p_n, p_l) &= 0 \quad \forall l \in [0, n-1] \Rightarrow \alpha_n (u_n, p_l) + \alpha_l \|p_l\|^2 = 0 \\ \alpha_l &= -\frac{(u_n, p_l)}{\|p_l\|^2} \alpha_n \quad l = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

b) La fonction de poids w est paire et l'intervalle $[a, b]$ est symétrique par rapport à 0 ; supposons que p_k soit de parité $(-1)^k$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ montrons que p_n est de parité $(-1)^n$. Le polynôme u_n est de parité $(-1)^n$. Si k et n sont de parité différente, le produit scalaire

Chapitre 8 • Fonctions orthogonales

(u_n, p_k) est nul car c'est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine. Ceci entraîne que les coefficients α_k sont nuls pour les valeurs de k dont la parité est différente de celle de n ; p_n (éq. 8.6) est donc une combinaison de polynômes qui sont tous de même parité $(-1)^n$.

4 Nous allons construire les polynômes de Hermite, Tchebychev et Laguerre selon le processus de Gram-Schmidt. En appliquant le résultat de **B** (b) on constate qu'à l'instar des polynômes de Legendre, les polynômes de Hermite et de Tchebychev sont de parité déterminée.

Le calcul des différents produits scalaires intervenant dans l'évaluation des coefficients est facilité si on évalue au préalable les intégrales :

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx \quad ; \quad J_n = \int_{-1}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad ; \quad K_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

Remarquons que par symétrie I_n et J_n sont nulles pour n impair : $I_{2p+1} = J_{2p+1} = 0$.

$$I_{2p} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} x^{2p} e^{-x^2} dx \stackrel{u=x^2}{=} \int_0^{\infty} u^{p-1/2} e^{-u} du = \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} J_{2p} &= \int_{-1}^1 \frac{x^{2p}}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^1 \frac{x^{2p}}{\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{u=x^2}{=} \int_0^1 u^{p-1/2} (1-u)^{-1/2} du \\ &= B(p+1/2, 1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{p!} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$K_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

Le résultat pour les premiers polynômes est donné dans la table ci-dessous (les calculs sans difficulté ne sont pas détaillés) : dans les trois cas on a $H_0 = T_0 = L_0 = 1$.

p_n		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
Legendre	P_n	x	$\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$
	$\ P_n\ ^2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$
Hermite	H_n	$2x$	$4x^2 - 2$	$8x^3 - 12x$
	$\ H_n\ ^2$	$2\sqrt{\pi}$	$8\sqrt{\pi}$	$48\sqrt{\pi}$
Tchebychev	T_n	x	$2x^2 - 1$	$4x^3 - 3x$
	$\ T_n\ ^2$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
Laguerre	L_n	$-x + 1$	$\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$	$\frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$
	$\ L_n\ ^2$	1	1	1

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Cette méthode d'orthogonalisation permet de construire les premiers polynômes à partir desquels la relation de récurrence obtenue dans le problème 8.4 question 4 permet d'engendrer toute la suite.

Problème 8.3

Soit $Q_N(x)$ un polynôme quelconque de degré N , $\{p_n\}$ la base de polynômes orthogonaux dans $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ et $\{u_n\}$ la suite des monômes $u_n(x) = x^n$; on a $p_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} u_k$; on peut écrire cette identité sous forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(0)} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_0^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_0^{(n)} & \alpha_1^{(n)} & \cdots & \alpha_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

La matrice $\tilde{\alpha} = \{\alpha_k^{(n)}\}$ est une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont non nuls puisqu'ils correspondent au coefficient directeur de chaque polynôme. Le déterminant de cette matrice est donc non nul et la matrice est inversible. La relation inverse montre que u_n est une combinaison de p_k pour $k = 0$ à n , uniquement. Un polynôme quelconque $Q_N(x)$ de degré N est une combinaison de u_n pour $n = 0, 1 \dots N$ et donc de p_n pour $n = 0, 1 \dots N$.

$$Q_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k p_k(x)$$

Le polynôme Q_N n'a donc pas de composante sur les $\{p_n\}$ au-delà de $n = N$ ce qui implique que $(Q_N, p_n) = 0$ si $n > N$.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Ce théorème est utilisé fréquemment dans les démonstrations reposant sur l'orthogonalité.

Problème 8.4

1 On identifie la forme standard de l'équation différentielle à la forme de Sturm après multiplication par une fonction inconnue w

$$\begin{array}{ll} \text{standard} \times w : & w(x) [\sigma(x)y'' + q(x)y' + \lambda_n y] = 0 \\ \text{Sturm développée} : & \rho(x)y'' + \rho'(x)y' + \lambda_n w(x)y = 0 \end{array}$$

Chapitre 8 • Fonctions orthogonales

On en déduit

$$\begin{aligned} w(x)\sigma(x) &= \rho(x) \quad \text{et} \quad w(x)q(x) = \rho'(x) \\ \Rightarrow \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} &= \frac{q(x)}{\sigma(x)} \\ \Rightarrow \rho &= \exp \left[\int \frac{q}{\sigma} dx \right] \quad \text{et} \quad w = \frac{\rho}{\sigma} \end{aligned}$$

L'équation étant homogène ρ et w sont définis à une même constante arbitraire près que nous prendrons égale à un.

On obtient pour les différentes familles :

Polynôme		Équation	$\rho(x)$	$w(x)$	(a, b)
Legendre	P_n	$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{-2x}{1-x^2}$	$1-x^2$	1	$(-1, 1)$
Hermite	H_n	$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = -2x$	e^{-x^2}	e^{-x^2}	$(-\infty, \infty)$
Tchebychev	T_n	$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{-x}{1-x^2}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
Laguerre	L_n	$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{1-x}{x}$	xe^{-x}	e^{-x}	$(0, \infty)$

Dans la dernière colonne du tableau ci-dessus apparaissent les deux valeurs qui annulent $\rho(x)$ et qui définissent l'intervalle (a, b) . On vérifie que la fonction w est bien définie positive dans l'intervalle ouvert $]a, b[$.

2 Orthogonalité : En calculant $\int_a^b \{p_n \times (E_m) - p_m \times (E_n)\} dx$ où (E_n) est le membre de gauche de l'équation différentielle sous la forme de Sturm on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b \left\{ p_n \times \left[(\rho p'_m)' + \lambda_m w(x) p_m \right] - p_m \times \left[(\rho p'_n)' - \lambda_n w(x) p_n \right] \right\} dx &= 0 \\ \int_a^b \left[p_n (\rho p'_m)' - p_m (\rho p'_n)' \right] dx + (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b w(x) p_m p_n dx &= 0 \end{aligned}$$

Dans la première intégrale on intègre par parties

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[p_n (\rho p'_m)' - p_m (\rho p'_n)' \right] dx &= p_n (\rho p'_m) \Big|_a^b - p_m (\rho p'_n) \Big|_a^b \\ &\quad - \int_a^b \left[p'_n (\rho p'_m) - p'_m (\rho p'_n) \right] dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\rho(a) = \rho(b) = 0$. On en déduit

$$\begin{aligned} & (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b w(x) p_m p_n dx = 0 \\ \Rightarrow & \int_a^b w(x) p_n(x) p_m(x) = 0 \quad \text{si } m \neq n \end{aligned}$$

car pour $m \neq n$ on a forcément $\lambda_m \neq \lambda_n$ (suite monotone).

3 Formule de Rodrigues. On dérive k fois l'équation standard

$$\frac{d^k}{dx^k} [\sigma(x) p_n'' + q(x) p_n' + \lambda_n p_n] = 0$$

en remarquant que σ est de degré au plus deux, et q de degré un, on a, grâce à la formule de Leibniz (voir chapitre 1)

$$\begin{aligned} (\sigma p_n'')^{(k)} &= \sigma p_n^{(k+2)} + k \sigma' p_n^{(k+1)} + \frac{1}{2} k(k-1) \sigma'' p_n^{(k)} \\ (q p_n')^{(k)} &= q p_n^{(k+1)} + k q' p_n^{(k)} \end{aligned}$$

On obtient une équation d'ordre 2 pour $p_n^{(k)}$:

$$\sigma p_n^{(k+2)} + (k \sigma' + q) p_n^{(k+1)} + \left(\frac{1}{2} k(k-1) \sigma'' + k q' + \lambda_n \right) p_n^{(k)} = 0$$

qu'on peut mettre sous forme de Sturm

$$(\rho_k p_n^{(k+1)})' + w_k \mu_k p_n^{(k)} = 0$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{1}{2} k(k-1) \sigma'' + k q' + \lambda_n \\ \frac{\rho_k'}{\rho_k} &= \frac{k \sigma' + q}{\sigma} \Rightarrow \rho_k = \sigma^k \exp \left[\int \frac{q}{\sigma} dx \right] \quad \text{et } w_k = \frac{\rho_k}{\sigma} \end{aligned}$$

Or on a (voir ci-dessus)

$$\exp \left[\int \frac{q}{\sigma} dx \right] = \rho = \sigma w$$

On en déduit

$$\rho_k = \sigma^{k+1} w \quad w_k = \sigma^k w$$

L'équation devient donc

$$\begin{aligned} & (\sigma^{k+1} w p_n^{(k+1)})' + \mu_k \sigma^k w p_n^{(k)} = 0 \quad k \in [0, n-1] \\ \Rightarrow & p_n^{(k)} = - \frac{(\sigma^{k+1} w p_n^{(k+1)})'}{\mu_k \sigma^k w} \end{aligned}$$

Chapitre 8 • Fonctions orthogonales

Faisons $k = n - 1$ dans cette identité : $p_n^{(n)}$ est une constante et sort de la dérivée du membre de droite.

$$p_n^{(n-1)} = -p_n^{(n)} \frac{(\sigma^n w)'}{\mu_{n-1} \sigma^{n-1} w}$$

En descendant les valeurs de k jusqu'à 0 on obtient

$$\begin{aligned} p_n^{(n-2)} &= -\frac{(\sigma^{n-1} w p_n^{(n-1)})'}{\mu_{n-2} \sigma^{n-2} w} = \frac{p_n^{(n)}}{\mu_{n-1} \mu_{n-2}} \frac{(\sigma^n w)''}{\sigma^{n-2} w} \\ p_n^{(n-3)} &= -\frac{p_n^{(n)}}{\mu_{n-1} \mu_{n-2} \mu_{n-3}} \frac{(\sigma^n w)'''}{\sigma^{n-3} w} \\ &\vdots \\ p_n^{(0)} &\equiv p_n(x) = \frac{A_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [w(x) \sigma^n(x)] \end{aligned}$$

avec

$$A_n = (-1)^n \frac{p_n^{(n)}}{\prod_k \mu_k}$$

Pour chaque famille de polynômes cette formule s'exprime par

Polynôme		Rodrigues
Legendre	P_n	$\frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n]$
Hermite	H_n	$(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$
Tchebychev	T_n	$\frac{(-1)^n 2^n n!}{2n!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n-1/2}]$
Laguerre	L_n	$\frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$

4 Relation de récurrence

a) Le polynôme $x p_n(x)$ est de degré $n+1$; compte tenu du résultat du problème 8.3 on en déduit

$$x p_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k p_k(x)$$

b) Les coefficients α_k s'expriment par

$$\alpha_k = (p_k, x p_n) = \int_a^b w(x) p_k(x) x p_n(x) dx = (x p_k, p_n)$$

Toujours d'après le résultat du problème 8.3 ce dernier produit scalaire est nul si $n > d^\circ(xp_k) = k + 1$, c'est-à-dire si $k < n - 1$. Donc

$$xp_n(x) = \sum_{k=n-1}^{n+1} \alpha_k p_k(x) = \alpha_{n-1} p_{n-1}(x) + \alpha_n p_n(x) + \alpha_{n+1} p_{n+1}(x)$$

c) La relation établie à la question précédente se met sous la forme d'une relation de récurrence

$$p_{n+1}(x) = (a_n + xb_n)p_n(x) + c_n p_{n-1}(x)$$

où les coefficients $a_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$, $b_n = \frac{1}{\alpha_{n+1}}$ et $c_n = -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n+1}}$; si les polynômes sont de parité définie, le coefficient a_n est nul. Le coefficient b_n s'obtient en identifiant les coefficients directeurs de part et d'autre du signe égal.

Polynôme		Récurrence
Legendre	P_n	$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$
Hermite	H_n	$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$
Tchebychev	T_n	$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$
Laguerre	L_n	$(n+1)L_{n+1} = -xL_n + (2n+1)L_n - nL_{n-1}$

5 Les zéros de p_n sont tous réels et dans $]a, b[$

a) p_n ($n > 0$) change au moins une fois de signe dans $]a, b[$. En effet

$$n > 0 \Rightarrow (p_n, p_0) = 0 = p_0 \int_a^b w(x)p_n(x)dx$$

puisque p_0 est constant. La fonction w est positive; donc pour que l'intégrale s'annule, p_n doit changer de signe au moins une fois dans $]a, b[$.

b) Supposons que p_n change k fois de signe dans $]a, b[$ (avec $k < n$) et désignons par x_1, x_2, \dots, x_k les positions de ces changements de signe (zéros de p_n). Le polynôme $Q_k(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k)$ est de degré k . On peut donc écrire (voir problème 8.3)

$$k < n \Rightarrow (Q_k, p_n) = 0$$

$$\int_a^b w(x)Q_k(x)p_n(x)dx = 0$$

Mais les polynômes Q_k et p_n ont les mêmes changements de signe; leur produit est donc de signe constant dans $]a, b[$. L'intégrale ne peut donc pas s'annuler. La contradiction n'est levée que si $k = n$ car à ce moment là le produit scalaire (Q_k, p_n) n'est pas forcément nul. Cela entraîne que p_n a au moins n zéros réels dans $]a, b[$. Mais comme p_n est de degré n il a au plus n zéros réels. On en déduit que p_n a tous ses zéros réels et dans $]a, b[$.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Ce problème permet d'obtenir les principales propriétés des familles de polynômes orthogonaux et présente les techniques standard, basées sur l'orthogonalité, utilisées dans les problèmes mettant en jeu ces polynômes.

Problème 8.5

Une façon d'optimiser la bande passante d'un filtre d'ordre n est de rechercher dans l'ensemble \mathcal{P} des polynômes de degré exactement égal à n celui qui approche le mieux zéro pour $x \in [-1, 1]$, c'est-à-dire celui qui rend minimal la quantité

$$\mathcal{M}(p) = \max_{x \in [-1, 1]} |p(x)|$$

On rappelle (voir problème 8.4) que les polynômes de Tchebychev sont solution de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0$$

avec $T_n(1) = 1$

1 On fait le changement de variable $x = \cos \theta$ dans l'équation différentielle

$$\begin{aligned} T_n(x = \cos \theta) &= \tilde{T}_n(\theta) \\ T_n' &= \frac{d}{dx} T_n(x) = \frac{d}{d\theta} \tilde{T}_n(\theta) \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin \theta} \tilde{T}_n'(\theta) \\ T_n'' &= \frac{d}{dx} T_n'(x) = \frac{d}{d\theta} \left[-\frac{1}{\sin \theta} \tilde{T}_n'(\theta) \right] \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \tilde{T}_n''(\theta) - \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \tilde{T}_n'(\theta) \\ \sin^2 \theta \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \tilde{T}_n''(\theta) - \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \tilde{T}_n'(\theta) \right] - \cos \theta \left[-\frac{1}{\sin \theta} \tilde{T}_n'(\theta) \right] + n^2 \tilde{T}_n(\theta) &= 0 \\ \Rightarrow \tilde{T}_n''(\theta) + n^2 \tilde{T}_n(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

a) On en déduit que

$$\tilde{T}_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)$$

Pour obtenir $T_n(\cos \theta)$ il faut exprimer $\tilde{T}_n(\theta)$ sous la forme d'un polynôme en $\cos \theta$. Commençons par montrer que la fonction $\sin(n\theta)$ n'est pas un polynôme en $\cos \theta$:

$$\begin{aligned} \sin(n\theta) &= \frac{1}{2i} (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = \frac{1}{2i} [(\cos \theta + i \sin \theta)^n - (\cos \theta - i \sin \theta)^n] \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \theta)^{n-k} [(i \sin \theta)^k - (-i \sin \theta)^k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(i \sin \theta)^k - (-i \sin \theta)^k] &= 0 \text{ si } k = 2l \\ &= 2i(-1)^l \sin^{2l+1} \theta = 2i(-1)^l \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)^l \text{ si } k = 2l + 1 \end{aligned}$$

Donc $\sin(n\theta) = \sin \theta \times \text{polynôme en } \cos \theta \xrightarrow{\cos \theta = x} \sqrt{1-x^2} \times \text{polynôme en } x$.

On doit donc avoir $B_n = 0 \Rightarrow T_n(\cos \theta) = A_n \cos(n\theta)$; par ailleurs

$$T_n(1) = 1 \Rightarrow A_n = 1 \Rightarrow T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

b) On retrouve bien : $T_0 = 1$ et

$$\begin{aligned} T_1(\cos \theta) &= \cos \theta & \Rightarrow T_1(x) &= x \\ T_2(\cos \theta) &= \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 & \Rightarrow T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(\cos \theta) &= \cos 3\theta = \dots = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta & \Rightarrow T_3(x) &= 4x^3 - 3x \end{aligned}$$

c) On en déduit aisément les zéros et les extrema de $T_n(x)$:

$$\begin{aligned} \text{zéros} & : T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \\ & \Rightarrow n\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_k = \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2n}\right] \\ \text{extrema} & : T_n(x) = \pm 1 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = \pm 1 \\ & \Rightarrow n\theta = k\pi \Rightarrow x_k = \cos\left[k\frac{\pi}{n}\right] \end{aligned}$$

d) On établit la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} \cos(n+1)\theta &= \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \\ \cos(n-1)\theta &= \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta \\ \cos(n-1)\theta + \cos(n+1)\theta &= 2 \cos n\theta \cos \theta \\ T_{n-1} + T_{n+1} &= 2xT_n \end{aligned}$$

Soit q_n le coefficient directeur de T_n . En identifiant le coefficient du terme de plus haut degré (en x^{n+1}) dans cette relation de récurrence il vient :

$$q_{n+1} = 2q_n$$

Comme $T_1(x) = x \Rightarrow q_1 = 1$; on déduit de ces deux équations $q_n = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

2 On note $\widehat{\mathcal{P}}$ l'ensemble des polynômes de degré exactement égal à n ($n > 0$) et de coefficient directeur égal à 1. On définit $\widehat{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$. On a donc $\widehat{T}_n \in \widehat{\mathcal{P}}$.

a) On calcule $\mathcal{M}(\widehat{T}_n)$

$$\mathcal{M}(\widehat{T}_n) = \max_{x \in [-1,1]} |\widehat{T}_n| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

puisque $\max_{x \in [-1,1]} |T_n| = 1$.

b) Soit $p \in \widehat{\mathcal{P}}$, $p \neq \widehat{T}_n$. Supposons que $\mathcal{M}(p) < \mathcal{M}(\widehat{T}_n)$. On définit le polynôme $q = \widehat{T}_n - p$.

i) Puisque \widehat{T}_n et p ont même coefficient directeur, dans la différence le terme en x^n disparaît.

On a donc degré de $q < n$.

ii) En $x_k = \cos k \frac{\pi}{n} \rightarrow \widehat{T}_n$ est tour à tour maximum et minimum ; comme $\mathcal{M}(p) < \mathcal{M}(\widehat{T}_n)$ on a $q(x_0 = 1) > 0, q(x_1) < 0, q(x_2) > 0 \dots q(x_n = -1) = \text{sign}(-1)^n$.

iii) De la question précédente on conclut que le polynôme q change n fois de signe dans $[-1, 1]$. Or il est de degré $< n$ ce qui est contradictoire car le nombre de changements de signes est inférieur ou égal au nombre de zéros réels ; il ne peut donc pas exister de polynôme $p \in \widehat{\mathcal{P}}$ tel que $\mathcal{M}(p) < \mathcal{M}(\widehat{T}_n)$.

Le polynôme T_n est bien celui qui, parmi les polynômes de degré n , réalise la meilleure approximation de zéro dans l'intervalle $[-1, 1]$ au sens de l'écart défini ci-dessus.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Cette application des polynômes de Tchebychev n'exploite pas leur propriété d'orthogonalité mais leur particularité de constituer la meilleure approximation polynomiale de zéro sur un intervalle. Cette propriété est aussi utilisée en analyse numérique dans la méthode d'économisation de Tchebychev.

Problème 8.6

On désigne par $\{z_k\}, k = 1, 2, \dots$ la suite des zéros de J_0 et par $\{u_k\}, k = 1, 2, \dots$ la famille de fonctions définies par $u_k(x) = J_0(z_k x)$.

1 En utilisant le résultat de l'exercice 7.4 on a

$$\begin{aligned} x u_k''(x) + u_k'(x) + x z_k^2 u_k(x) &= 0 \\ (x u_k'(x))' + x z_k^2 u_k(x) &= 0 \quad (E_k) \end{aligned}$$

2 On intègre entre 0 et 1 la combinaison d'équation $u_k \times (E_l) - u_l \times (E_k)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 [u_k(x) (x u_l'(x))' - u_l(x) (x u_k'(x))'] dx + (z_l^2 - z_k^2) \int_0^1 x u_l(x) u_k(x) dx &= 0 \\ [u_k(x) (x u_l'(x)) - u_l(x) (x u_k'(x))]_0^1 - \int_0^1 [u_k'(x) (x u_l'(x)) - u_l'(x) (x u_k'(x))] dx + \\ (z_l^2 - z_k^2) \int_0^1 x u_l(x) u_k(x) dx &= 0 \\ \Rightarrow \int_0^1 x u_l(x) u_k(x) dx = 0 \quad \text{si } k \neq l \end{aligned}$$

puisque $u_k(1) = u_l(1) = 0$ et que d'autre part les zéros étant tous distincts, $k \neq l \Rightarrow z_l \neq z_k$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x u_k(x) u_l(x) dx = N_k \delta_{kl} \quad \text{où } N_k = \int_0^1 x |u_k(x)|^2 dx$$

Cela établit que cette famille constitue une *suite orthogonale* sur $(0,1)$ avec fonction de poids x et $N_k = \|u_k\|^2$ est le carré de la norme.

3 Nous allons déterminer N_k .

a) Si dans la question 1 on définit $u_\alpha(x) = J_0(\alpha x)$ où α est un réel quelconque (*a priori* $\neq z_k$) on obtient l'équivalent de l'équation (E_k)

$$(xu'_\alpha(x))' + x\alpha^2 u_\alpha(x) = 0 \quad (E_\alpha)$$

Si on combine $u_\beta \times (E_\alpha) - u_\alpha \times (E_\beta)$ on obtient

$$[u_\beta(x)(xu'_\alpha(x)) - u_\alpha(x)(xu'_\beta(x))]_0^1 + (\beta^2 - \alpha^2) \int_0^1 xu_\beta(x)u_\alpha(x)dx = 0$$

En remarquant que $u_\beta(1) = J_0(\beta)$ et que $u'_\alpha(1) = \alpha J'_0(\alpha)$ on obtient

$$(\beta^2 - \alpha^2) \int_0^1 xu_\beta(x)u_\alpha(x)dx = \alpha J_0(\beta)J'_0(\alpha) - \beta J_0(\alpha)J'_0(\beta)$$

Prenons maintenant la limite $\beta \rightarrow \alpha$:

$$\int_0^1 x [u_\alpha(x)]^2 dx = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{\alpha J_0(\beta)J'_0(\alpha) - \beta J_0(\alpha)J'_0(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}$$

La dernière étape consiste à prendre la limite $\alpha \rightarrow z_k$:

$$\int_0^1 x [u_k(x)]^2 dx = \lim_{\alpha \rightarrow z_k} \left\{ \int_0^1 x [u_\alpha(x)]^2 dx \right\}$$

b) On pose $\beta = \alpha + \epsilon$ et on fait un développement au premier ordre en ϵ :

$$\begin{aligned} J_0(\alpha + \epsilon) &= J_0(\alpha) + \epsilon J'_0(\alpha) + o(\epsilon) \\ J'_0(\alpha + \epsilon) &= J'_0(\alpha) + \epsilon J''_0(\alpha) + o(\epsilon) \\ \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{\beta J_0(\alpha)J'_0(\beta) - \alpha J_0(\beta)J'_0(\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\alpha + \epsilon) J_0(\alpha)J'_0(\alpha + \epsilon) - \alpha J_0(\alpha + \epsilon)J'_0(\alpha)}{-2\alpha\epsilon} \\ &= \frac{J_0(\alpha)J'_0(\alpha) + \alpha J_0(\alpha)J''_0(\alpha) - \alpha (J'_0(\alpha))^2}{-2\alpha} \end{aligned}$$

c) Si maintenant on fait tendre $\alpha \rightarrow z_k$ (on rappelle $J_0(z_k) = 0$) on obtient

$$N_k = \int_0^1 x [u_k(x)]^2 dx = \frac{1}{2} (J'_0(z_k))^2 = \frac{1}{2} (J_1(z_k))^2$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Les fonctions de Bessel permettent d'engendrer des bases orthogonales. Cette propriété est exploitée dans la résolution de problèmes aux limites à symétrie cylindrique (problème 9.9).

Problème 8.7

On rappelle que les polynômes de Legendre sont représentés par la formule de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n]$$

On en déduit :

- 1 $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$; en effet $(1-x^2)^n$ est un polynôme pair ; donc ses dérivées successives sont tour à tour paires ou impaires.
- 2 Le coefficient directeur de P_n vient à travers l'expression ci-dessus de la dérivée $n^{ième}$ du terme de plus haut degré dans $(1-x^2)^n$ soit $(-1)^n x^{2n}$

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} [(-1)^n 2n(2n-1)\dots(2n-n+1)] = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

- 3 Le terme constant vient à travers l'expression ci-dessus de la dérivée $n^{ième}$ du terme de degré n dans $(1-x^2)^n$; ce terme n'existe que si n est pair ; en appliquant la formule du binôme à $(1-x^2)^n$ le terme en x^n est : $C_n^{n/2} (-1)^{n/2} x^n$. La dérivée $n^{ième}$ va engendrer un $n!$; le coefficient constant dans P_n est donc

$$P_n(0) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} C_n^{n/2} (-1)^{n/2} n! = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2^n (\frac{n}{2}!)^2} \quad n \text{ pair}$$

- 4 La norme des P_n est donnée par

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n] dx$$

On intègre par parties

$$\|P_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left\{ P_n(x) [(1-x^2)^n]^{(n-1)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_n'(x) [(1-x^2)^n]^{(n-1)} dx \right\}$$

Evaluons le terme intégré

$$\begin{aligned} [(1-x^2)^n]^{(n-1)} &= [(1-x)^n (1+x)^n]^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k [(1-x)^n]^{(k)} [(1+x)^n]^{(n-1-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (-1)^n n(n-1)\dots(n-k+1) (1-x)^{n-k} \\ &\quad \times n(n-1)\dots(k+2)(1+x)^{k+1} \end{aligned}$$

Pour $0 \leq k \leq n-1$ on a à la fois $k+1 > 0$ et $n-k > 0$; donc l'expression ci-dessus s'annule en $x = -1$ et en $x = 1$. On a donc

$$\|P_n\|^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_n'(x) [(1-x^2)^n]^{(n-1)} dx$$

En itérant le processus n fois on obtient

$$\|P_n\|^2 = \frac{(-1)^{2n}}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_n^{(n)}(x) (1-x^2)^n dx$$

Mais $P_n^{(n)} = n! \alpha_n$ où α_n est le coefficient directeur de P_n . Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx &= 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx \stackrel{x=\sin \theta}{=} 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2n+1} d\theta \\ &= B\left(n+1, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} = \frac{n! \sqrt{\pi}}{\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}} \\ &= \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \end{aligned}$$

En mettant tout ensemble

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 &= \frac{n! \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}}{2^n n!} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \\ \|P_n\| &= \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \end{aligned}$$

5 On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_{2n+1}(x) dx &= -\frac{1}{2^{2n+1} (2n+1)!} \int_0^1 [(1-x^2)^{2n+1}]^{(2n+1)} dx \\ &= -\frac{1}{2^{2n+1} (2n+1)!} [(1-x^2)^{2n+1}]^{(2n)} \Big|_0^1 \end{aligned}$$

En $x = 1$ le terme entre $[]$ est nul (voir **4**). En $x = 0$ il reste le terme constant de cette expression, c'est-à-dire la dérivée $(2n)^{i\text{ème}}$ du terme en x^{2n} dans $(1-x^2)^{2n+1}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_{2n+1}(x) dx &= \frac{1}{2^{2n+1} (2n+1)!} (2n)! C_{2n+1}^n (-1)^n \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n! (n+1)!} \end{aligned}$$

Chapitre 8 • Fonctions orthogonales

- 6 D'après le résultat du problème 8.4 (4), la relation de récurrence s'écrit (en tenant compte du fait que P_n est de parité définie)

$$xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_{n-1}(x)$$

En identifiant les termes de plus haut degré de part et d'autre on a

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = a_n \frac{(2n+2)!}{2^{n+1} ((n+1)!)^2} \Rightarrow a_n = \frac{n+1}{2n+1}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(xP_n, P_{n-1})}{\|P_{n-1}\|^2} = \frac{(P_n, xP_{n-1})}{\|P_{n-1}\|^2} = \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} \frac{(P_n, xP_{n-1})}{\|P_n\|^2} \\ &= \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} a_{n-1} = \frac{2n-1}{2n+1} \frac{n}{2n-1} = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

On en déduit

$$(2n+1)xP_n = nP_{n-1} + (n+1)P_{n+1}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Toutes ces propriétés seront exploitées dans le problème 9.8.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

9

RAPPELS DE COURS

9.1 LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

- *Méthode générale*

La forme générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n est :

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

où y est la fonction inconnue ; les fonctions $\{a_k\}$ sont les coefficients de l'équation et la fonction f le second membre.

Dans chaque intervalle où tous les coefficients $\{a_k(x)\}$ sont définis continus, la solution générale d'une telle équation s'obtient en ajoutant à une solution particulière de l'équation complète la solution générale de l'équation sans second membre ; elle-même résultant d'une combinaison linéaire arbitraire des n solutions indépendantes de l'équation sans second membre.

On sait résoudre de façon générale les cas suivants :

- Équations du premier ordre

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)$$

la solution générale est de la forme : $y(x) = \alpha y_1(x) + y_0(x)$ où $y_1(x) = \exp \left[- \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx \right]$ est une solution de l'équation sans second membre, α une constante arbitraire et $y_0(x)$ une solution particulière de l'équation complète, qui peut s'obtenir par *variation de la constante* :

$$y_0(x) = y_1(x) \int \frac{f(x')}{a_0(x')y_1(x')} dx'.$$

- Équation du second ordre à **coefficients constants**

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$$

L'équation sans second membre se résout en posant $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est déterminé par identification. La solution particulière de l'équation complète s'obtient par identification selon la forme du second membre ou par la méthode de variation de la constante.

Chapitre 9 · Équations différentielles et équations aux dérivées partielles

Nous allons étudier plus longuement le cas des équations du second ordre sans second membre et à **coefficients non constants** que nous écrivons sous forme normalisée (après division par le coefficient $a_0(x)$ de y'') :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (9.1)$$

On peut caractériser l'équation par ses points singuliers.

- On dit que x_0 est un *point ordinaire* de l'équation si $p(x)$ et $q(x)$ sont définies continues au voisinage de x_0 .
- On dit que x_0 est un *point singulier régulier* de l'équation si x_0 n'est pas un point ordinaire mais si $(x - x_0)p(x)$ et $(x - x_0)^2q(x)$ sont définies continues au voisinage de x_0 .

Pour l'équation de Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

le point $x_0 = 0$ est un point singulier régulier.

À défaut de méthode générale pour résoudre ce type d'équation, on peut utiliser l'une des approches suivantes.

- *Transformations intégrales (Fourier, Laplace)*

Si l'équation peut être mise sous la forme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

où les fonctions a, b, c sont des polynômes de degré au plus égal à un, alors la transformée de l'équation est une équation différentielle d'ordre au plus égal à 1, en vertu de la propriété $\mathcal{F}\{tf(t)\} = -\frac{1}{2i\pi}F'(\nu)$ (ou équivalent pour la transformée de Laplace). Elle peut donc être résolue. En revanche rien ne garantit qu'on puisse en prendre la transformée inverse, en particulier si aucune de deux solutions de l'équation de départ n'admet de transformée de Fourier (de Laplace) la méthode échouera à ce niveau. Si elle réussit on obtient une, voire deux, solutions particulières.

- *Méthode de Frobenius (recherche de solutions sous la forme de séries)*

Le théorème de Fuchs établit que si x_0 est un point ordinaire ou un point singulier régulier de l'équation différentielle (9.1) il existe au moins une solution de la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\lambda} \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

où $\lambda \in \mathbb{N}$ pour un point ordinaire et plus généralement à \mathbb{C} (ou \mathbb{R} ou \mathbb{Z}) pour un point singulier régulier. λ est appelé *exposant indiciel*. Les coefficients a_n et l'exposant indiciel λ sont déterminés par identification. Ce dernier apparaît comme la solution d'une équation quadratique, l'équation indicielle. Dans le cas où les deux solutions de cette équation sont réelles, c'est la plus grande des deux qui engendrera la solution de l'équation différentielle prévue par le théorème de Fuchs.

• *Méthode de variation de la constante*

De façon générale, si une solution particulière y_1 est connue on peut trouver une autre solution indépendante y_2 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire en cherchant $y_2(x) = z(x)y_1(x)$. En remplaçant dans l'équation on obtient pour z

$$y_1 z'' + z' (2y_1' + p y_1) = 0$$

qui est une équation du premier ordre en z' dont la solution formelle est

$$z(x) = \int \frac{\exp\left(-\int p(x) dx\right)}{y_1^2(x)} dx$$

• *Problèmes aux limites*

L'évolution d'un système physique est modélisée mathématiquement par une équation différentielle qui a le plus souvent un second membre (force extérieure, tension d'excitation...) et dont la solution doit satisfaire une ou plusieurs conditions (conditions aux limites, conditions initiales).

Les méthodes ci-dessus permettent d'accéder à une ou plusieurs solutions particulières de l'équation sans second membre. Selon la forme des conditions aux limites et selon les propriétés des solutions on peut obtenir une solution particulière de l'équation complète à l'aide de la transformation de Laplace, de la transformation de Fourier, de la méthode des fonctions de Green (problème 9.5).

9.2 ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Nous nous cantonnerons à l'étude de quelques équations usuelles de la physique.

Soit $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y, z, t) \rightarrow \psi(x, y, z, t)$. On note Δ l'opérateur *Laplacien* :

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Équation de Laplace $\Delta\psi = 0$

Équation de la chaleur $\frac{\partial\psi}{\partial t} = a^2\Delta\psi$

Équation d'ondes $\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$

Équation de Schrödinger $i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(\mathbf{r})\psi$

L'opérateur Laplacien, omniprésent dans ces équations s'exprime dans d'autres systèmes de coordonnées (en utilisant la notation ∂_u pour $\frac{\partial}{\partial u}$) :

– coordonnées sphériques $\psi(r, \theta, \varphi) \rightarrow \Delta\psi = \partial_r^2\psi + \frac{2}{r}\partial_r\psi + \frac{1}{r^2} [\partial_\theta^2\psi + \cot\theta \partial_\theta\psi] + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\varphi^2\psi$

– coordonnées cylindriques $\psi(\rho, \varphi, z) \rightarrow \Delta\psi = \partial_\rho^2\psi + \frac{1}{\rho}\partial_\rho\psi + \frac{1}{\rho^2}\partial_\varphi^2\psi + \partial_z^2\psi$

Selon le type d'équation et le type de conditions aux limites on peut établir l'existence et l'unicité de la solution. Pour trouver la (ou les) solution(s) on peut de nouveau avoir recours à la transformation de Laplace ou à la transformation de Fourier. On utilise aussi le plus souvent la méthode de *séparation des variables* qui consiste à chercher des *solutions élémentaires* sous forme factorisée $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. L'équation aux dérivées partielles se factorise alors en autant d'équations différentielles que de variables, en introduisant des constantes arbitraires appelées *constantes de séparation*. Du fait de la linéarité de ces équations, on obtient une solution générale en superposant les solutions élémentaires.

ÉNONCÉS DES PROBLÈMES

Problème 9.1 Équation différentielle et séries de Fourier

Soit f un signal 2π -périodique défini pour $t \in]-\pi, \pi[$ par $f(t) = t$. Un oscillateur amorti est excité à partir de l'instant $t = 0$ par le signal f . L'équation de l'oscillateur est

$$y'' + 2y' + 2y = f(t)u(t)$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$.

- 1 Trouver une solution particulière de l'équation (pour $t \geq 0$) sous la forme d'une série de Fourier ; cette solution satisfait-elle les conditions initiales ?
- 2 Trouver la solution générale de l'équation puis la solution particulière qui satisfait aux conditions initiales.

On donne : $w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 + 4} = -\frac{1}{8} \left(1 + \frac{\pi}{\sinh \pi} \right)$ et $w_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^4 + 4} = -\frac{\pi}{4 \sinh \pi}$.

Problème 9.2 Seconde solution de l'équation de Bessel

Soit l'équation de Bessel d'indice 0 :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

La fonction de Bessel $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$ est la solution régulière. Chercher l'autre solution sous la forme

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Comparer le résultat à la fonction de Neumann

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} [\ln x - \ln 2 + \gamma] J_0(x) + \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \dots \right]$$

où γ est la constante d'Euler.

Problème 9.3 Équation de Legendre

L'équation de Legendre est définie pour $\alpha \in \mathbb{R}$ par

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha y = 0$$

1 Quels sont les points singuliers de cette équation ?

2 On cherche des solutions sous la forme $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

a) Quel est *a priori* le rayon de convergence de cette série ?

b) Établir la relation de récurrence entre les coefficients a_k .

c) Les solutions obtenues sont-elles définies pour $x = 1$?

On rappelle le critère de convergence de Gauss : pour une série numérique de terme général

u_n , si $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{q}{n} + \frac{B(n)}{n^2}$ où $B(n)$ est bornée quand $n \rightarrow \infty$ alors la série converge si $q > 1$, elle diverge si $q \leq 1$.

3 Comment choisir α pour que l'équation ait une solution définie $\forall x \in [-1, 1]$? Quelle est la nature de cette solution ?

Problème 9.4 Méthode de Frobenius

Trouver selon les valeurs du paramètre réel $\alpha \geq \frac{1}{2}$ les solutions de l'équation

$$x^2(x+1)y'' + 2x^2y' - \alpha(\alpha-1)(x+1)y = 0$$

sous forme de développements en puissances de x .

Indication : dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ on cherchera la deuxième solution sous la forme : $y_2(x) = y_1(x) \ln x + z(x)$.

Problème 9.5 Fonction de Green et réponse impulsionnelle

La réponse y d'un système physique à une excitation x est souvent donnée par une équation différentielle avec second membre

$$\mathcal{D}.y(t) = x(t) \tag{9.2}$$

Chapitre 9 · Équations différentielles et équations aux dérivées partielles

où \mathcal{D} est un opérateur différentiel linéaire. On appelle *fonction de Green* $g(t)$ la solution de l'équation quand x est remplacé par la distribution de Dirac

$$\mathcal{D}.g(t) = \delta(t)$$

- 1 Montrer que la solution y de l'équation 9.2 est donnée par $y = g * x$.
- 2 Considérons un système physique dont l'équation de réponse est

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = x(t) \quad (9.3)$$

- a) Déterminer la transformée de Fourier $G(\nu)$ de la fonction de Green $g(t)$.
- b) En déduire l'expression de $g(t)$.
- c) En utilisant la dérivation au sens des distributions, vérifier que $g(t)$ est bien solution de l'équation (9.3) avec second membre $\delta(t)$.

- 3 On entre dans le système le signal $x(t) = e^{-|t|}$. Calculer le signal de sortie $y(t)$.

On donne $\int \sin(at)e^{-bt} dt = -\frac{e^{-bt}}{a^2 + b^2} [a \cos(at) + b \sin(at)]$.

Problème 9.6 Équation différentielle et transformation de Fourier

Soit l'équation différentielle

$$y'' + ty' + 3y = e^{-t^2/2}$$

A l'aide de la transformation de Fourier, trouver une solution particulière de cette équation.

Problème 9.7 Équation différentielle et transformation de Laplace

Résoudre l'équation différentielle

$$(t - 1)y'' + ty' + y = 0 \quad y(0) = 1 ; y'(0) = -1$$

en utilisant la transformation de Laplace.

Problème 9.8 Équation de Laplace en coordonnées sphériques

Nous allons résoudre l'équation de Laplace en coordonnées sphériques par séparation des variables. On cherche des solutions indépendantes de φ (symétrie azimutale) et factorisées sous la forme

$$V(r, \theta) \equiv V_1(r)V_2(\theta)$$

- 1 Établir que les fonctions V_1 et V_2 satisfont

$$r \frac{(rV_1)''}{V_1} = \lambda = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{(\sin \theta V_2')'}{V_2}$$

où λ est une constante arbitraire.

- 2 Montrer que l'équation angulaire se réécrit après changement de variable $x = \cos \theta$

$$(1 - x^2)\tilde{V}_2'' - 2x\tilde{V}_2' + \lambda\tilde{V}_2 = 0$$

où $\tilde{V}_2(x = \cos \theta) = V_2(\theta)$.

- 3 La fonction $V_2(\theta)$ doit être bornée $\forall \theta \in [0, \pi]$. En déduire que $\lambda = n(n + 1)$ où $n \in \mathbb{N}$.
- 4 Résoudre dans ce cas l'équation pour $V_1(r)$.
- 5 En déduire que la solution générale est de la forme :

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \theta) \quad (9.4)$$

où A_n et B_n sont des constantes arbitraires.

- 6 On va maintenant étudier un problème spécifique en précisant des conditions aux limites. Il s'agit de déterminer quel est le potentiel à l'intérieur d'une sphère de rayon R sachant que sur l'hémisphère nord le potentiel est constant et vaut V_0 et que sur l'hémisphère sud il est nul :

$$\begin{aligned} V(R, \theta) &= V_0 & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ &= 0 & \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[\end{aligned}$$

Déterminer les constantes A_n et B_n (équation 9.4) pour ce problème. On pourra utiliser les résultats du problème 8.7.

Problème 9.9 Équation de Laplace en coordonnées cylindriques

Il s'agit de trouver la fonction $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation de Laplace : $\Delta V = 0$ où la fonction V est connue sur la surface d'un cylindre de hauteur L , et de rayon a (voir figure 9.1). Compte tenu de la géométrie du problème on utilise les coordonnées cylindriques : $V(\rho, \varphi, z)$. Les conditions aux limites sont explicitement $V = 0$ sur les parois et sur le fond du cylindre, $V = V_0(\rho, \varphi)$ sur le couvercle.

Nous allons chercher des solutions du problème intérieur par séparation des variables :

$$V(\rho, \varphi, z) = V_1(\rho)V_2(\varphi)V_3(z)$$

- 1 Montrer que

$$V_3'' - \lambda V_3 = 0$$

$$V_2'' + \mu V_2 = 0$$

$$V_1'' + \frac{1}{\rho} V_1' + \left(\lambda - \frac{\mu}{\rho^2} \right) V_1 = 0$$

où λ et μ sont les constantes de séparation.

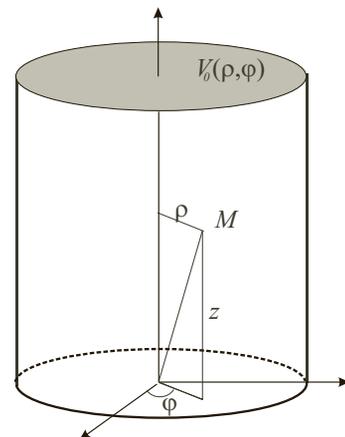


Figure 9.1

Chapitre 9 · Équations différentielles et équations aux dérivées partielles

- 2** Montrer que la condition $V_2(\varphi + 2\pi) = V_2(\varphi)$ implique $\mu = n^2$ où $n \in \mathbb{N}$. En déduire que V_2 est de la forme

$$V_2(\varphi) = A_2 \cos(n\varphi) + B_2 \sin(n\varphi)$$

- 3** On étudie maintenant l'équation en V_1 . Montrer que pour avoir une solution bornée à l'intérieur du cylindre et qui s'annule sur la paroi il faut $\lambda > 0$ (on posera $\lambda = k^2$). En déduire la forme de la fonction $V_1(\rho)$.

- 4** Dans la suite on supposera que le problème a une symétrie azimutale, c'est-à-dire que $V(\rho, \varphi, z)$ ne dépend pas de φ . C'est le cas si le potentiel sur le couvercle de la boîte est lui-même indépendant de φ : $V_0(\rho, \varphi) \equiv V_0(\rho)$. Dans ce cas $V_2(\varphi) = c^{te} \Leftrightarrow n = 0$. En imposant les conditions sur le fond de la boîte ($z = 0$) et sur la paroi ($\rho = a$) montrer que pour chaque entier positif p il existe une solution de la forme

$$V_p(\rho, z) = A_p J_0(z_p \frac{\rho}{a}) \sinh(z_p \frac{z}{a}) \quad p \in \mathbb{N}^*$$

où A_p est une constante arbitraire et $\{z_p\}$ désigne la suite des zéros de la fonction de Bessel J_0 .

- 5** De par la linéarité de l'équation la solution générale est une superposition de ces solutions élémentaires.

$$V(\rho, z) = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} A_p J_0(z_p \frac{\rho}{a}) \sinh(z_p \frac{z}{a})$$

- a) En imposant la dernière condition aux limites, sur le couvercle, $V(\rho, z = L) = V_0(\rho)$ et en utilisant l'orthogonalité décrite dans le problème 8.6, montrer que les constantes arbitraires A_p peuvent s'écrire

$$A_p = \frac{2}{\sinh(z_p \frac{L}{a}) [a J_1(z_p)]^2} \int_0^a \rho V_0(\rho) J_0(z_p \frac{\rho}{a}) d\rho$$

- b) Déterminer A_p dans le cas où $V_0(\rho) \equiv V_0$ constant.

Problème 9.10 Équation de la chaleur

- 1** Calculer la transformée de Laplace de la fonction $\operatorname{Erfc}(\frac{a}{\sqrt{t}})$.

On rappelle $\operatorname{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$. Indication : on calculera la transformée de Laplace de $\frac{d}{dt} \operatorname{Erfc}(\frac{a}{\sqrt{t}})$ et on utilisera le résultat de l'exercice 3.1(10).

- 2** Une tige conductrice semi-infinie est initialement à la température T_0 . À l'instant $t = 0$ on met son extrémité (qu'on prendra comme origine des abscisses) en contact avec un thermostat à la température $T \neq T_0$. On veut étudier l'évolution de la température le long de la tige au cours du temps.

La température $u(x, t)$ en un point d'abscisse x de la tige à l'instant t est solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad a > 0, x \geq 0, t \geq 0$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} t = 0 \quad u(x, 0) &= T_0 \\ t > 0 \quad u(0, t) &= T \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) &= T_0 \end{aligned}$$

Déterminer $u(x, t)$ en utilisant la transformation de Laplace.

DU MAL À DÉMARRER ?

Problème 9.1

On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme d'une série de Fourier de période 2π ; il faut commencer par exprimer le second membre sous la forme d'une série de Fourier.

Problème 9.2

Pour comparer la solution obtenue avec la fonction de Neumann, pensez qu'une combinaison linéaire de solutions d'une équation différentielle linéaire est encore solution.

Problème 9.3

3 Si à partir d'un rang N les coefficients sont tous nuls le problème de convergence ne se pose plus.

Problème 9.4

Le point $x = 0$ est un point singulier régulier de l'équation (pour $\alpha \neq 1$) ce qui suggère la recherche de solution sous forme de série généralisée. La forme de la relation de récurrence conduit à une discussion sur les valeurs du paramètre α .

Problème 9.5

2 (a) On mettra $G(\nu)$ sous la forme

$$G(\nu) = A \left[\frac{1}{2i\pi(\nu - \nu_0) + 1} - \frac{1}{2i\pi(\nu + \nu_0) + 1} \right]$$

où A et ν_0 sont à déterminer.

2 (c) Utiliser $g(t)\delta(t) = g(0)\delta(t)$.

3 Calculer directement le produit de convolution en utilisant l'intégrale donnée.

Problème 9.6

Il faut utiliser les propriétés de la transformation de Fourier.

Problème 9.7

Prendre la transformée de Laplace de l'équation en utilisant les conditions initiales.

Problème 9.8

- 1 r et θ sont des variables indépendantes.
- 3 Utiliser le résultat de l'exercice 9.3.
- 4 Remarquer que l'équation différentielle est homogène par rapport à la variable r .
- 6 Utiliser le résultat du problème 8.7 (5).

Problème 9.9

- 1 Même méthode de séparation que le problème précédent.
- 2 La condition $V_2(\varphi + 2\pi) = V_2(\varphi)$ entraîne que 2π est un multiple de la période de V_2 .
- 3 On reconnaît l'équation de Bessel ou de Bessel modifiée selon le signe de λ .
- 5 On utilisera

$$\int_0^1 x J_0(z_k x) dx = \frac{J_1(z_k)}{z_k}$$

identité obtenue en intégrant l'équation différentielle (E_k) (problème 8.6 1).

Problème 9.10

- 1 On prend la transformée de Laplace par rapport au temps : $\mathcal{L}_t \{u(x, t)\} = U(x, p)$.
- 2 La condition « $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t)$ bornée $\forall t$ » entraîne « $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x, p)$ bornée $\forall p$ ».

Corrigés des problèmes

Problème 9.1

- 1 On va chercher une solution particulière sous la forme d'une série de Fourier de période 2π :

$$y(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)$$

Commençons par mettre f sous la forme d'une série de Fourier : la fonction est impaire donc $a_n = 0$ et

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt = -2 \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow f(t) = -2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt)$$

On plonge y dans l'équation différentielle et on identifie au second membre (pour $t \geq 0$) ; il vient :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0 \\ (-n^2 + 2) \alpha_n + 2n \beta_n &= 0 \\ -2n \alpha_n + (-n^2 + 2) \beta_n &= -2 \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\alpha_n = 4 \frac{(-1)^n}{n^4 + 4} \quad ; \quad \beta_n = 2(-1)^n \frac{n^2 - 2}{n(n^4 + 4)}$$

La solution particulière obtenue est donc

$$y_P(t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 + 4} \left[\cos(nt) + \frac{n^2 - 2}{2n} \sin(nt) \right]$$

Cette solution ne satisfait pas les conditions initiales puisque $y_P(0) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 + 4} = 4w_1$ et

$$y'_P(0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2}{n^4 + 4} = 2w_2 - 4w_1 = \frac{1}{2}.$$

2 La solution générale de l'équation est la somme de la solution particulière y_P et de la solution générale y_g de l'équation sans second membre

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm i$. On obtient pour la solution générale de l'équation sans second membre

$$y_g(t) = e^{-t}(A \cos t + B \sin t)$$

et pour celle de l'équation complète

$$y(t) = y_g(t) + y_P(t)$$

On impose les conditions initiales

$$\begin{aligned} y(0) &= A + y_P(0) = 0 \Rightarrow A = -4w_1 \\ y(0) &= -A + B + y'_P(0) = 0 \Rightarrow B = A - y'_P(0) = -2w_2 \end{aligned}$$

Finalement la solution recherchée est

$$y_0(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \left[\left(1 + \frac{\pi}{\sinh \pi} \right) \cos t + \frac{\pi}{\sinh \pi} \sin t \right] + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 + 4} \left[\cos(nt) + \frac{n^2 - 2}{2n} \sin(nt) \right]$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

La recherche de solution sous la forme d'une série de Fourier dans le cas d'un second membre périodique est une extension de la méthode de recherche sous la forme d'une combinaison sinus-cosinus quand le second membre est une fonction harmonique de fréquence donnée.

Problème 9.2

Soit l'équation de Bessel d'indice 0 :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

On cherche la deuxième solution sous la forme

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$y_2'(x) = J_0'(x) \ln x + \frac{1}{x} J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$y_2''(x) = J_0''(x) \ln x + \frac{2}{x} J_0'(x) - \frac{1}{x^2} J_0(x) + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

$$y_2'' + \frac{1}{x}y_2' + y_2 = \frac{2}{x} J_0'(x) + \frac{a_1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} x^k [(k+2)(k+1)a_{k+2} + (k+2)a_{k+2} + a_k]$$

En remplaçant $J_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$ et en identifiant terme à terme les séries obtenues on obtient

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ (k+2)^2 a_{k+2} + a_k &= 0 \text{ pour } k \text{ impair} \Rightarrow a_{2p+1} = 0 \\ (2p+2)^2 a_{2p+2} + a_{2p} &= \frac{(-1)^p}{2^{2p} p!(p+1)!} \text{ pour } k = 2p \geq 0 \end{aligned}$$

Cette relation de récurrence ne peut se résoudre que numériquement ; on peut obtenir les premiers termes

$$\begin{aligned} p = 0 &\Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{4} + \frac{1}{4} \\ p = 1 &\Rightarrow a_4 = \frac{1}{16} \left(a_2 + \frac{1}{8} \right) = \frac{a_0}{64} - \frac{3}{128} \end{aligned}$$

Il vient alors

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \left[\frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \dots \right] + a_0 \left[1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \dots \right]$$

On reconnaît, en facteur de a_0 , la fonction J_0 . Si on compare à la fonction de Neumann on obtient

$$y_2(x) = \frac{\pi}{2} N_0(x) + [a_0 + \ln 2 - \gamma] J_0(x)$$

Donc y_2 est une combinaison linéaire des deux solutions indépendantes N_0 et J_0 . En choisissant $a_0 = -\ln 2 + \gamma$ on a $y_2 = \frac{\pi}{2} N_0$.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

La méthode de Frobenius prévoit que dans le cas où l'équation indicelle a une racine double r_0 , alors la première solution est de la forme $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r_0}$ et la seconde

$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+r_0}$. Dans le cas de l'équation de Bessel d'indice zéro il y a racine double $r_0 = 0$ d'où la forme de la seconde solution.

Problème 9.3

L'équation est définie pour $\alpha \in \mathbb{R}$ par

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha y = 0$$

- 1 Les points singuliers de cette équation sont les zéros du coefficient de y'' soit $x = \pm 1$. Si on normalise l'équation on obtient

$$p(x) = \frac{-2x}{(1 - x^2)} \text{ et } q(x) = \frac{\alpha}{(1 - x^2)}$$

où les coefficients p et q réfèrent à l'équation différentielle 9.1. Les fonctions $(x \pm 1)p(x)$ et $(x \pm 1)^2 q(x)$ sont définies continues. On en conclut que les points ± 1 sont des points singuliers réguliers.

- 2 On cherche des solutions sous la forme $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

- a) Le point $x_0 = 0$ est un point ordinaire. Du fait des points singuliers en $x = \pm 1$ la convergence de la série n'est assurée que pour $|x| < 1$.
 b) Relation de récurrence entre les coefficients a_k :

$$(1 - x^2) \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k [(k+1)(k+2)a_{k+2} + (\alpha - k(k+1)a_k)] = 0$$

On en déduit

$$a_{k+2} = \frac{-\alpha + k(k+1)}{(k+1)(k+2)} a_k \tag{9.5}$$

Chapitre 9 · Équations différentielles et équations aux dérivées partielles

On a une relation de récurrence par pas de deux qui engendre deux solutions

$$\text{solutions paires : } k = 2p \Rightarrow a_{2p+2} = \frac{-\alpha + 2p(2p+1)}{(2p+1)(2p+2)} a_{2p}$$

$$y_P(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p} x^{2p}$$

$$\text{solutions impaires : } k = 2p - 1 \Rightarrow a_{2p+1} = \frac{-\alpha + 2p(2p-1)}{2p(2p+1)} a_{2p-1}$$

$$y_I(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p-1} x^{2p-1}$$

c) Prenons par exemple la solution paire. En $x = 1$

$$y_P(1) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p}$$

Appliquons le critère de Gauss pour étudier la convergence de cette série

$$\begin{aligned} \frac{a_{2p}}{a_{2p+2}} &= \frac{(2p+1)(2p+2)}{-\alpha + 2p(2p+1)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2p}\right) \left(1 + \frac{1}{p}\right)}{\left(1 + \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{4p^2}\right)} \\ &= \left(1 + \frac{3}{2p} + \frac{1}{2p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1-\alpha}{4p^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{p} + \frac{-3-\alpha}{4p^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right) \end{aligned}$$

En appliquant le critère de Gauss on a $q = 1$. Donc la série diverge. On montre qu'il en est de même pour la solution impaire. On a vu que $+1$ est point singulier de l'équation ; il n'est donc pas étonnant que la série diverge en ce point là.

3 Si on choisit $\alpha = N(N+1)$ la relation de récurrence (équation 9.5) va s'interrompre pour $k = N$ et la série se ramène à un polynôme, qui est défini $\forall x$ et donc en particulier pour $x \in [-1, 1]$. Par exemple pour N pair, $N = 2P$, c'est la solution paire qui va s'interrompre pour $p = P$ et on aura $a_{2p} = 0 \quad \forall p \geq P+1$; la solution paire est alors un polynôme de degré $2P$

$$y_P(x) = \sum_{p=0}^P a_{2p} x^{2p}$$

Si $N = 2P - 1$ c'est la solution impaire qui se ramène à un polynôme de degré $2P - 1$. Les polynômes ainsi engendrés sont les polynômes de Legendre (voir chapitre 8).

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Imposer que la solution soit bornée sur $[-1, 1]$ entraîne que le paramètre α ne peut prendre que des valeurs discrètes de la forme $N(N + 1)$. C'est cet argument qui conduit à la discrétisation du moment cinétique en mécanique quantique.

Problème 9.4

Solutions de l'équation $\left(\alpha \geq \frac{1}{2}\right)$

$$x^2(x + 1)y'' + 2x^2y' - \alpha(\alpha - 1)(x + 1)y = 0$$

- $\alpha = 1 \Rightarrow x^2(x + 1)y'' + 2x^2y' = 0$. On pose $z = y'$. Alors

$$\frac{z'}{z} = \frac{2}{x + 1} \Rightarrow z = C_1 \frac{1}{(x + 1)^2} \Rightarrow y = -C_1 \frac{1}{(x + 1)} + C_2$$

- $\alpha \neq 1$. On remarque que $x = 0$ est un point singulier régulier. On va donc chercher des solutions sous la forme

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

Le terme de plus bas degré, en x^r , vient de $-\alpha(\alpha - 1)y$ et de x^2y'' : en égalant son coefficient à zéro on obtient l'équation indicelle

$$a_0 [r(r - 1) - \alpha(\alpha - 1)] = 0 \Rightarrow r = \alpha \text{ ou } r = 1 - \alpha$$

Comme $\alpha \geq \frac{1}{2}$ c'est α qui est la plus grande des deux racines et donc on aura toujours une solution de la forme (théorème de Fuchs)

$$y = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Déterminons maintenant la relation de récurrence entre les coefficients a_k . Le coefficient du terme en x^{k+r} est donné pour $k \geq 1$

$$(k + r - 2)(k + r - 1)a_{k-1} + (k + r - 1)(k + r)a_k + 2(k + r - 1)a_{k-1} - \alpha(\alpha - 1)(a_k + a_{k-1}) = 0$$

ce qui donne

$$[(k + r - 1)(k + r) - \alpha(\alpha - 1)](a_k + a_{k-1}) = 0 \tag{9.6}$$

Pour $r = \alpha$ on obtient

$$k(k + 2\alpha - 1)(a_k + a_{k-1}) = 0 \quad k \geq 1$$

Chapitre 9 · Équations différentielles et équations aux dérivées partielles

Comme $\alpha \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha - 1 \geq 0$ on en déduit $a_k = -a_{k-1} \Rightarrow a_k = (-1)^k a_0$. On obtient donc la première solution

$$y_1(x) = a_0 x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = a_0 \frac{x^\alpha}{x+1} \quad |x| < 1$$

Pour obtenir la seconde solution faisons $r = 1 - \alpha$ dans la relation 9.6 :

$$k(k+1-2\alpha)(a_k + a_{k-1}) = 0 \quad k \geq 1$$

On voit que si $2\alpha - 1 = N \in \mathbb{N}^*$ la relation de récurrence est interrompue pour $k = N$. Commençons par envisager le cas

◇ $2\alpha - 1 \notin \mathbb{N}$. Dans ce cas $k(k+1-2\alpha) \neq 0 \Rightarrow (a_k + a_{k-1}) = 0$ on a la même relation de récurrence que pour y_1 et donc $a_k = (-1)^k a_0$; la seconde solution est donc

$$y_2(x) = a_0 x^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = a_0 \frac{x^{1-\alpha}}{x+1} \quad |x| < 1$$

◇ $2\alpha - 1 = N \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} (a_k + a_{k-1}) &= 0 \quad 1 \leq k \leq N-1 \Rightarrow a_k = (-1)^k a_0 \text{ pour } 1 \leq k \leq N-1 \\ (a_k + a_{k-1}) &= 0 \quad N+1 \leq k \Rightarrow a_k = (-1)^{k-N} a_N \text{ pour } k \geq N+1 \end{aligned}$$

On a donc apparemment deux autres solutions

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 x^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k x^k \\ z_2(x) &= a_N x^{1-\alpha} \sum_{k=N}^{\infty} (-1)^{k-N} x^k \end{aligned}$$

Cette dernière solution peut en fait être réexprimée

$$z_2(x) \stackrel{k'=k-N}{=} a_N x^{1-\alpha} x^N \sum_{k'=0}^{\infty} (-1)^{k'} x^{k'} = a_N \frac{x^{N+1-\alpha}}{x+1} = a_N \frac{x^\alpha}{x+1} \equiv y_1(x)$$

car puisque $2\alpha - 1 = N$ alors $N+1-\alpha = \alpha$ et on retrouve la solution y_1 . Donc seule la fonction y_2 est une nouvelle solution

$$y_2(x) = a_0 x^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} (-x)^k = a_0 x^{1-\alpha} \frac{1 - (-1)^N x^N}{1+x} = a_0 \frac{x^{1-\alpha} - (-1)^N x^\alpha}{1+x}$$

puisque $N+1-\alpha = \alpha$. Finalement

$$y_2(x) = a_0 \frac{x^{1-\alpha}}{1+x} + a'_0 y_1(x)$$

La nouvelle solution qui apparaît est la fonction $\frac{x^{1-\alpha}}{1+x}$, la même que dans le cas précédent où $2\alpha - 1 \notin \mathbb{N}$.

- ◇ $\alpha = \frac{1}{2}$. Dans ce cas les deux exposants indiciaux coïncident : $\alpha = 1 - \alpha$. La méthode consiste alors à chercher la seconde solution sous la forme (voir problème 9.2)

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + z(x)$$

avec $y_1(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ et $z(x) = \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$; en injectant dans l'équation on constate que $y_1(x) \ln x$ est solution ($z(x) \equiv 0$); on a donc

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x = \frac{\ln x \sqrt{x}}{x+1}$$

Problème 9.5

1 On rappelle que si $f, f', \dots, f^{(n)}$ et g sont dans \mathcal{L}^1 , $(f * g)^{(n)} = f^{(n)} * g$. On en déduit $\mathcal{D}.(g * x) = \mathcal{D}.g * x = \delta * x = x$.

2 L'équation satisfaite par $g(t)$ est

$$g''(t) + 2g'(t) + 5g(t) = \delta(t)$$

a) On prend la transformée de Fourier :

$$(-4\pi^2\nu^2 + 4i\pi\nu + 5)G(\nu) = 1 \Rightarrow G(\nu) = \frac{1}{-4\pi^2\nu^2 + 4i\pi\nu + 5}$$

b) On a

$$\begin{aligned} G(\nu) &= \frac{1}{(2i\pi\nu + 1)^2 + 4} = \frac{1}{(2i\pi\nu + 1 + 2i)(2i\pi\nu + 1 - 2i)} \\ &= \frac{1}{4i} \left[\frac{1}{2i\pi(\nu - \frac{1}{\pi}) + 1} - \frac{1}{2i\pi(\nu + \frac{1}{\pi}) + 1} \right] \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{2i\pi\nu + a}$ et $\mathcal{F}\{e^{2i\pi\nu_0 t} f(t)\} = F(\nu - \nu_0)$ on en déduit (ici $\nu_0 = \frac{1}{\pi}$)

$$g(t) = \frac{1}{4i} [e^{2i\pi\nu_0 t} e^{-t}u(t) - e^{-2i\pi\nu_0 t} e^{-t}u(t)]_{\nu_0 = \frac{1}{\pi}} = \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) u(t)$$

c) En utilisant la dérivation au sens des distributions,

$$g' = -\frac{1}{2}e^{-t} \sin(2t) u(t) + e^{-t} \cos(2t) u(t) + \frac{1}{2}e^{-t} \sin(2t) \delta(t)$$

Or on a $\sin(2t) \delta(t) = \sin(0) \delta(t) = 0 \Rightarrow g' = -\frac{1}{2}e^{-t} [\sin(2t) - 2 \cos(2t)] u(t)$

$$\begin{aligned} g'' &= \frac{1}{2}e^{-t} [\sin(2t) - 2 \cos(2t)] u(t) - e^{-t} [\cos(2t) + 2 \sin(2t)] u(t) \\ &\quad - \frac{1}{2}e^{-t} [\sin(2t) - 2 \cos(2t)] \delta(t) \\ &= -\frac{3}{2}e^{-t} \sin(2t) u(t) - 2e^{-t} \cos(2t) u(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

On vérifie bien que

$$g''(t) + 2g'(t) + 5g(t) = \delta(t)$$

Remarque

Soit $y_p(t) = e^{-t} (A \cos(2t) + B \sin(2t))$ la solution générale de l'équation sans second membre ; la fonction de Green est ici définie à cette fonction près : $g(t) + y_p(t)$ est encore solution de la même équation. Si on impose $g \in \mathcal{L}^1$ alors cette partie transitoire ne doit pas apparaître.

3 On entre dans le filtre le signal $x(t) = e^{-|t|}$. La réponse est

$$y(t) = g * x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-t'} \sin(2t') u(t') e^{-|t-t'|} dt' = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t'} \sin(2t') e^{-|t-t'|} dt'$$

Si $t \leq 0 \Rightarrow |t - t'| = t' - t \Rightarrow$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t'} \sin(2t') e^{-t'+t} dt' = \frac{1}{2}e^t \int_0^{\infty} e^{-2t'} \sin(2t') dt' \\ &= \frac{1}{8}e^t \end{aligned}$$

Si $t \geq 0 \Rightarrow |t - t'| = t - t'$ pour $t' \leq t$ et $t' - t$ sinon ; on en déduit

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t e^{-t'} \sin(2t') e^{-t+t'} dt' + \frac{1}{2} \int_t^{\infty} e^{-t'} \sin(2t') e^{t-t'} dt' \\ &= \frac{1 - \cos(2t)}{4} e^{-t} + \frac{1}{2}e^t \times \frac{e^{-2t'}}{8} (2 \cos(2t') + 2 \sin(2t')) \Bigg|_t^{\infty} \\ &= \frac{2 - \cos(2t) + \sin(2t)}{8} e^{-t} \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{8}e^t \text{ si } t \leq 0 \\ &= \frac{2 - \cos(2t) + \sin(2t)}{8}e^{-t} \text{ si } t \geq 0 \end{aligned}$$

Remarque

Là encore pour obtenir la solution générale de l'équation on rajoute y_p ; si on cherche une solution dans \mathcal{L}^1 alors la fonction y ci-dessus convient.

Ce qu'il faut retenir de ce problème

La fonction de Green n'est autre que la réponse impulsionnelle des problèmes de filtre. Cette méthode est surtout utilisée dans les équations aux dérivées partielles comme les équations de Maxwell où elle conduit à la notion de potentiel retardé.

Problème 9.6

Prenons la transformée de Fourier de l'équation

$$\begin{aligned} y'' + ty' + 3y &= e^{-t^2/2} \\ (2i\pi\nu)^2 Y(\nu) - \frac{1}{2i\pi} [2i\pi\nu Y(\nu)]' + 3Y(\nu) &= \sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\nu^2} \\ -\nu Y'(\nu) + (-4\pi^2\nu^2 + 2) Y(\nu) &= \sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\nu^2} \end{aligned}$$

Résolvons l'équation sans second membre

$$\begin{aligned} -\nu Y'(\nu) + (-4\pi^2\nu^2 + 2) Y(\nu) &= 0 \\ \frac{Y'(\nu)}{Y(\nu)} = \frac{-4\pi^2\nu^2 + 2}{\nu} &= -4\pi^2\nu + \frac{2}{\nu} \\ \ln |Y(\nu)| &= -4\pi^2\nu^2 + \ln \nu^2 + C \\ \Rightarrow Y_g(\nu) &= K\nu^2 e^{-2\pi^2\nu^2} \end{aligned}$$

Appliquons la méthode de variation de la constante $Y_0(\nu) = K(\nu)\nu^2 e^{-2\pi^2\nu^2}$

$$\begin{aligned} -\nu \left(K'(\nu)\nu^2 e^{-2\pi^2\nu^2} \right) &= \sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\nu^2} \Rightarrow K(\nu) = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\frac{1}{\nu^2} \\ \Rightarrow Y_0(\nu) &= \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\nu^2} \end{aligned}$$

On a $y_0(t) = \mathcal{F}^{-1}(Y_0) = \frac{1}{2}e^{-t^2/2}$ et $y_g(t) = \mathcal{F}^{-1}(Y_g) = A\frac{d^2}{dt^2} \left(e^{-t^2/2} \right) = A(t^2 - 1)e^{-t^2/2}$. On a donc

$$y(t) = A(t^2 - 1)e^{-t^2/2} + \frac{1}{2}e^{-t^2/2}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

La forme du second membre (fonction gaussienne) suggère d'utiliser la transformée de Fourier. Cette méthode ne permet de trouver qu'une seule solution de l'équation sans second membre. On peut prolonger l'exercice en recherchant l'autre solution par une autre méthode (développement en série).

Problème 9.7

Prenons la transformée de Laplace de l'équation

$$(t - 1)y'' + ty' + y = 0$$

On utilise $\mathcal{L}\{y''\} = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p + 1$ et $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(p)$. L'équation transformée s'écrit donc :

$$\begin{aligned} -(p^2Y(p) - p + 1)' - (p^2Y(p) - p + 1) - (pY(p) - 1)' + Y(p) &= 0 \\ (p + 1)Y' + (p + 2)Y &= 1 \end{aligned}$$

Résolvons l'équation sans second membre

$$\begin{aligned} (p + 1)Y' + (p + 2)Y &= 0 \Rightarrow \frac{Y'}{Y} = -\frac{p + 2}{p + 1} = -1 - \frac{1}{p + 1} \\ \Rightarrow Y(p) &= K \frac{e^{-p}}{p + 1} \end{aligned}$$

On obtient une solution particulière de l'équation complète par variation de la constante

$$\begin{aligned} Y_0(p) &= K(p) \frac{e^{-p}}{p + 1} \Rightarrow (p + 1)K'(p) \frac{e^{-p}}{p + 1} = 1 \Rightarrow K(p) = e^p \\ Y_0(p) &= \frac{1}{p + 1} \end{aligned}$$

On a donc

$$Y(p) = K \frac{e^{-p}}{p + 1} + \frac{1}{p + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} K e^{-(t-1)}u(t - 1) + e^{-t}u(t)$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

On remarque qu'en dépit des **deux** conditions initiales il reste une constante arbitraire dans la solution. L'explication vient du point singulier régulier de l'équation en $t = 1$ qui sépare l'axe réel en deux intervalles $(0, 1)$ dans lequel sont imposées les conditions sur y et l'intervalle $(1, \infty)$ dans lequel « vit » la solution $e^{-(t-1)}u(t - 1)$ qui n'est donc pas contrainte par les conditions en $t = 0$. Si on veut imposer la continuité de la solution sur \mathbb{R}^+ il faut fixer $K = 0$.

Problème 9.8

1 On remplace dans l'équation V par $V_1 V_2$ et on divise par $V_1 V_2$. On obtient

$$r \frac{(r V_1)''}{V_1} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{(\sin \theta V_2')'}{V_2} = 0$$

Le premier terme ne dépend que de r et le second que de θ ; pour que la somme des deux soit identiquement nulle il faut que les termes soient de la forme :

$$r \frac{(r V_1)''}{V_1} = \lambda = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{(\sin \theta V_2')'}{V_2}$$

où λ est une constante arbitraire.

2 L'équation angulaire se réécrit

$$\sin \theta V_2'' + \cos \theta V_2' + \lambda \sin \theta V_2 = 0$$

On fait le changement de variable $x = \cos \theta$:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_2(x) &= V_2(\theta = \text{Arc cos}(x)) \\ \frac{dV_2}{d\theta} &= \frac{d\tilde{V}_2(x)}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d\tilde{V}_2(x)}{dx} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d\tilde{V}_2(x)}{dx} \\ \frac{d^2V_2}{d\theta^2} &= \frac{d}{dx} \left[-\sqrt{1-x^2} \frac{d\tilde{V}_2(x)}{dx} \right] \frac{dx}{d\theta} \\ &= -\sqrt{1-x^2} \left[-\sqrt{1-x^2} \frac{d^2\tilde{V}_2(x)}{dx^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d\tilde{V}_2(x)}{dx} \right] \\ &= (1-x^2) \tilde{V}_2''(x) - x \tilde{V}_2'(x) \end{aligned}$$

L'équation différentielle devient

$$(1-x^2)\tilde{V}_2'' - 2x\tilde{V}_2' + \lambda\tilde{V}_2 = 0$$

3 On reconnaît l'équation de Legendre. On a vu dans le problème 9.3 que pour λ quelconque les solutions ne sont pas définies en $x = \pm 1$ c'est-à-dire en $\theta = 0, \pi$ ce qui correspond à l'axe Oz . Le potentiel V doit être défini partout dans la sphère, en particulier sur l'axe Oz . La solution à ce problème a été trouvée dans le problème 9.3 : il faut que λ soit de la forme $\lambda = n(n+1)$ avec $n \in \mathbb{N}$ auquel cas l'équation a une solution polynômiale (celle de même parité que n), qui est le polynôme de Legendre P_n et qui est donc définie $\forall x \in [-1, 1]$; l'autre solution reste singulière en $x = \pm 1$

$$\tilde{V}_2(x) = P_n(x) \Rightarrow V_2(\theta) = P_n(\cos \theta)$$

4 L'équation pour V_1 est de la forme, avec $\lambda = n(n+1)$,

$$\begin{aligned} r(rV_1)'' - n(n+1)V_1 &= 0 \\ r^2V_1'' + 2rV_1' - n(n+1)V_1 &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation est homogène par rapport à la variable r ce qui suggère de chercher des solutions de la forme $V_1(r) = r^\alpha$. On obtient

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1)r^\alpha + 2\alpha r^\alpha - n(n+1)r^\alpha &= 0 \\ \alpha^2 + \alpha - n(n+1) &= 0 \\ \Rightarrow \alpha = n \text{ ou } -(n+1) \end{aligned}$$

et

$$V_1(r) = A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}$$

où les A_n et B_n sont des constantes arbitraires.

5 On en déduit que les *solutions élémentaires* de l'équation de Laplace sont de la forme

$$n \in \mathbb{N} \implies V_n(r, \theta) = \left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \theta)$$

La solution générale s'obtient par superposition des solutions élémentaires :

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \theta)$$

6 On cherche la solution du problème *intérieur* qui satisfait la condition aux limites : $V(R, \theta) = V_0(\theta)$ où

$$\begin{aligned} V_0(\theta) &= V_0 \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ &= 0 \quad \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[\end{aligned}$$

Comme le potentiel est *borné* en tout point du domaine intérieur à la sphère, donc en particulier en $r = 0$, on doit avoir $B_n \equiv 0$. Par ailleurs la fonction V doit satisfaire la condition sur la sphère :

$$V(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta) = V_0(\theta)$$

Cette identité n'est rien d'autre que le développement de la fonction $V_0(\theta)$ sur la base de polynômes de Legendre. On en déduit

$$A_n R^n = \frac{(V_0, P_n)}{\|P_n\|^2} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{V}_0(x) P_n(x) dx$$

où $\tilde{V}_0(x) = V_0(\theta = \text{Arc cos}(x)) = V_0$ pour $x \in]0, 1]$ et 0 sinon. On a donc

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n} V_0 \int_0^1 P_n(x) dx$$

$$n = 0 \Rightarrow \int_0^1 P_0(x) dx = 1$$

$$n = 2k > 0 \Rightarrow \int_0^1 P_{2k}(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_{2k}(x) dx = \frac{1}{2} (P_{2k}, P_0) = 0$$

$$n = 2k+1 \Rightarrow \int_0^1 P_{2k+1}(x) dx = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \text{ (voir question 5 du problème 8.7)}$$

On en déduit la solution

$$V(r, \theta) = \frac{V_0}{2} + V_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(4k+3)(2k)!}{2^{2k+2} k! (k+1)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos \theta)$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Ce problème est résolu par la méthode de séparation des variables. La factorisation de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques conduit pour la partie angulaire à une équation de Legendre. La discrétisation de l'ensemble des solutions élémentaires vient de la condition de continuité de la solution sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ (voir problème 9.3).

Problème 9.9

I En injectant la solution sous forme factorisée $V(\rho, \varphi, z) = V_1(\rho)V_2(\varphi)V_3(z)$ dans l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

et en divisant par V on obtient

$$\left(\frac{V_1''}{V_1} + \frac{1}{\rho} \frac{V_1'}{V_1} \right)_\rho + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{V_2''}{V_2} \right)_\varphi + \left(\frac{V_3''}{V_3} \right)_z = 0$$

On en déduit

$$\frac{V_3''}{V_3} = \lambda \quad \frac{V_2''}{V_2} = -\mu \quad \frac{V_1''}{V_1} + \frac{1}{\rho} \frac{V_1'}{V_1} = -\lambda + \frac{\mu}{\rho^2}$$

ou encore

$$\begin{aligned} V_3'' - \lambda V_3 &= 0 \\ V_2'' + \mu V_2 &= 0 \\ V_1'' + \frac{1}{\rho} V_1' + \left(\lambda - \frac{\mu}{\rho^2} \right) V_1 &= 0 \end{aligned}$$

où λ et μ sont des constantes arbitraires (constantes de séparation).

- 2** L'équation pour V_2 a pour solution une combinaison d'exponentielles si $\mu < 0$, une combinaison de fonctions sinus/cosinus si $\mu > 0$, un polynôme en φ si $\mu = 0$. La condition de périodicité $V_2(\varphi + 2\pi) = V_2(\varphi)$ ne peut être satisfaite que par la combinaison sinus/cosinus, (ou par une constante si $\mu = 0$).

On a donc $\mu \geq 0$; posons $\mu = r^2$ avec $r \in \mathbb{R}$.

$$V_2(\varphi) = A \cos(r\varphi) + B \sin(r\varphi)$$

La condition $V_2(\varphi + 2\pi) = V_2(\varphi)$ entraîne soit que la fonction V_2 est périodique avec une période T telle que $nT = 2\pi$ avec n quelconque dans \mathbb{N}^* , soit qu'elle est constante. La fonction $A \cos(r\varphi) + B \sin(r\varphi)$ est de période $\frac{2\pi}{r} \Rightarrow r = n \in \mathbb{N}^*$. Donc

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow V_2(\varphi) = A_2 \cos(n\varphi) + B_2 \sin(n\varphi)$$

où le cas $n = 0$ correspond à la fonction constante.

- 3** On alors pour V_1

$$V_1'' + \frac{1}{\rho} V_1' + \left(\lambda - \frac{n^2}{\rho^2}\right) V_1 = 0$$

qui est une équation de Bessel d'ordre n . Suite à la discussion de l'exercice 7.4 :

- si $\lambda < 0$ c'est une équation de Bessel modifiée. Comme les fonctions de Bessel modifiées ne s'annulent pas, la condition de potentiel zéro sur la paroi ne peut pas être satisfaite ;
- si $\lambda = 0$ on a une équation homogène de solution générale $V_1(\rho) = A\rho^n + B/\rho^n$ qui ne peut satisfaire les deux conditions que si $A = B = 0$;
- si $\lambda > 0$ c'est une équation de Bessel standard dont les solutions ont des zéros ; on pose $\lambda = k^2$ et la solution générale est de la forme

$$V_1(\rho) = \alpha J_n(k\rho) + \beta N_n(k\rho)$$

Le fait que V_1 soit bornée à l'intérieur du cylindre exclut la composante $N_n(k\rho)$ qui est singulière à l'origine. On a donc $V_1(\rho) = J_n(k\rho)$.

- 4** On se restreint aux solutions à symétrie azimutale, $n = 0$. La fonction V_3 est solution de l'équation

$$\begin{aligned} V_3'' - k^2 V_3 &= 0 \\ V_3(z) &= A \sinh(kz) + B \cosh(kz) \end{aligned}$$

Les solutions élémentaires sont maintenant de la forme

$$V(\rho, z) = J_0(k\rho) [A \sinh(kz) + B \cosh(kz)]$$

On doit avoir

$$\begin{aligned} V(\rho, z = 0) = 0 &\Rightarrow J_0(k\rho)B = 0 \quad \forall \rho \Rightarrow B = 0 \\ V(\rho = a, z) = 0 &\Rightarrow J_0(ka) \sinh(kz) = 0 \quad \forall z \\ &\Rightarrow J_0(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{z_p}{a} \end{aligned}$$

où $\{z_p\}$ désigne la suite des zéros de J_0 . Finalement on obtient les solutions élémentaires indiquées par l'entier p :

$$V_p(\rho, z) = A_p J_0(z_p \frac{\rho}{a}) \sinh(z_p \frac{z}{a}) \quad p \in \mathbb{N}^*$$

- 5** On obtient la solution générale compatible avec les conditions sur les parois en superposant ces solutions élémentaires.

$$V(\rho, z) = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} A_p J_0(z_p \frac{\rho}{a}) \sinh(z_p \frac{z}{a})$$

a) Imposons la dernière condition aux limites, sur le couvercle,

$$V(\rho, z = L) = V_0(\rho) = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} A_p J_0(z_p \frac{\rho}{a}) \sinh(z_p \frac{L}{a})$$

La condition d'orthogonalité établie dans le problème 8.6 devient ici

$$\int_0^a \rho J_0(z_k \frac{\rho}{a}) J_0(z_l \frac{\rho}{a}) d\rho = \frac{a^2}{2} (J_1(z_k))^2 \delta_{kl}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^a \rho V_0(\rho) J_0(z_k \frac{\rho}{a}) d\rho &= \int_0^a \rho J_0(z_k \frac{\rho}{a}) \left\{ \sum_{p \in \mathbb{N}^*} A_p J_0(z_p \frac{\rho}{a}) \sinh(z_p \frac{L}{a}) \right\} d\rho \\ &= \sum_{p \in \mathbb{N}^*} A_p \sinh(z_p \frac{L}{a}) \int_0^a \rho J_0(z_k \frac{\rho}{a}) J_0(z_p \frac{\rho}{a}) d\rho \\ &= A_k \sinh(z_k \frac{L}{a}) \frac{a^2}{2} (J_1(z_k))^2 \end{aligned}$$

D'où le résultat

$$A_k = \frac{2}{\sinh(z_k \frac{L}{a}) [a J_1(z_k)]^2} \int_0^a \rho V_0(\rho) J_0(z_k \frac{\rho}{a}) d\rho$$

- b)** En particulier si $V_0(\rho) = V_0 = c^{te}$: on montre en intégrant l'équation différentielle (E_k) (**1** du problème 8.6) que

$$\int_0^a \rho J_0(z_k \frac{\rho}{a}) d\rho = a^2 \frac{J_1(z_k)}{z_k}$$

On obtient pour le coefficient A_k :

$$A_k = \frac{2V_0}{z_k J_1(z_k) \sinh(z_k \frac{L}{a})}$$

et

$$V(\rho, z) = 2V_0 \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{J_0(z_p \frac{\rho}{a}) \sinh(z_p \frac{z}{a})}{z_p J_1(z_p) \sinh(z_p \frac{L}{a})}$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

Ici aussi le problème est résolu par la méthode de séparation des variables. La factorisation de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques conduit pour la partie radiale à une équation de Bessel. La discrétisation de l'ensemble des solutions élémentaires vient de la condition aux bords.

Problème 9.10

1 Soit $g(t) = \text{Erfc}(\frac{a}{\sqrt{t}})$ et $G(p)$ sa transformée de Laplace. On a

$$g'(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{a}{2t\sqrt{t}} e^{-a^2/t} \right\} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{t} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-a^2/t} \right]$$

On rappelle le résultat (voir exercice 3.1(**10**)) : $\mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-a^2/t}}{\sqrt{t}} u(t) \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2a\sqrt{p}}, a > 0$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{g'(t)\} &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_p^\infty \sqrt{\frac{\pi}{p'}} e^{-2a\sqrt{p'}} dp' \stackrel{u=2a\sqrt{p}}{=} \int_{2a\sqrt{p}}^\infty e^{-u} du = e^{-2a\sqrt{p}} \\ \mathcal{L} \{g'(t)\} &= pG(p) - g(0) = pG(p) \Rightarrow G(p) = \mathcal{L} \left\{ \text{Erfc} \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right) \right\} = \frac{e^{-2a\sqrt{p}}}{p} \end{aligned}$$

2 On pose

$$U(x, p) = \mathcal{L}_t \{u(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t) dt$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation on obtient

$$\begin{aligned} pU(x, p) - u(x, 0) &= a^2 \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2} \\ a^2 \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2} - pU(x, p) &= -T_0 \end{aligned}$$

La solution générale de cette équation (du second ordre à coefficients constants par rapport à la variable x) est

$$U(x, p) = A(p) \exp \left[-\frac{x}{a} \sqrt{p} \right] + B(p) \exp \left[\frac{x}{a} \sqrt{p} \right] + \frac{T_0}{p}$$

On doit avoir $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t)$ bornée $\forall t$ ce qui entraîne $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x, p)$ bornée, et donc $B(p) \equiv 0$.
 Imposons la condition à l'origine :

$$u(0, t) = T \Rightarrow U(0, p) = \frac{T}{p} \Rightarrow A(p) = \frac{T - T_0}{p}$$

Finalement la solution est

$$U(x, p) = \frac{T - T_0}{p} \exp\left[-\frac{x}{a}\sqrt{p}\right] + \frac{T_0}{p}$$

Compte tenu du résultat préliminaire on en déduit

$$u(x, t) = (T - T_0) \operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) u(t) + T_0 u(t)$$

Ce qu'il faut retenir de ce problème

L'équation de la chaleur est résolue par transformation de Laplace, ce qui est suggéré par les conditions aux limites et par la nature transitoire du phénomène étudié. Le système doit tendre asymptotiquement vers l'équilibre thermodynamique ; nous vérifions effectivement sur la solution que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = T \quad \forall x$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] APPEL Walter, *Mathématiques pour la physique*, H&K éditions 2005
- [2] ARNAUDIES Jean-Marie, FRAYSSE Henri, *Cours de mathématiques, tome 2 (Analyse) et tome 3 (Compléments d'analyse)*, Dunod 1994
- [3] ARFKEN George B., WEBER Hans J. *Mathematical methods for physicists*, Elsevier 2005
- [4] AULIAC Guy, AVIGNANT Jean, AZOULAY Elie, *Techniques mathématiques pour la physique*, Ellipses 2000
- [5] GASQUET Claude, WITOMSKI Patrick, *Analyse de Fourier et applications*, Dunod, 1996
- [6] GHORBANZADEH Dariush, MARRY Pierre, POINT Nelly, VIAL Denise, *Mathématiques du signal : Rappels de cours et exercices résolus*, Dunod 2008
- [7] PAPOULIS Atanasios, *Signal Analysis*, McGraw-Hill 1977
- [8] PARODI Maurice, *Mathématiques appliquées à l'art de l'ingénieur*, SEDES 1965
- [9] PETIT Roger, *L'outil mathématique pour la physique*, Dunod 1998
- [10] REINHARD Hervé, *Éléments de mathématiques du signal*, Dunod 2002
- [11] RODDIER François. *Distributions et transformation de Fourier*, McGraw-Hill 1993
- [12] ROUBINE Elie, *Distributions Signal*, Eyrolles 1999

INDEX

A

abscisse de sommabilité, 66
analytique (fonction), 95

B

base orthogonale, 197
 de Fourier, 197
 et fonctions de Bessel, 203
Bayard-Bode (relations de), 152, 160
Bessel (fonctions de), *voir* chapitre 7
Bêta (fonction eulérienne), 8
Bromwich-Wagner (intégrale de), 67, 100

C

Cauchy
 condition de, 95
 critère de convergence de séries, 3
 formule intégrale de, 95
 partie principale de, 2, 42, 51, 127
 théorème de, 95

Causal

 critère de causalité, 150–152
 filtre, 70
 fonction, 4, 33, 66, 119, 128
 signal discret, 101
causal, *voir* chapitre 6
condition de Cauchy, 95
critère de convergence
 d'intégrales, 1
 de Gauss, 225
 de séries, 2, 3

D

dérivée non entière, 149
Dirac
 distribution, 124
 impulsion de, 6
 peigne de, 125

distribution, *voir* chapitre 5
 convolution, 127
 de Dirac, 124
 peigne de Dirac, 125
 Pseudo-fonction, 124
 transformée de Fourier, 125

E

égalité presque partout, 5
équation
 d'ondes, 170, 172, 173, 223
 de Bessel, 165, 166
 de la chaleur, 169, 223, 228
 Transformée de Fourier, 45
 de Laplace, 223, 226, 227
 Transformée de Fourier, 45
 de Legendre, 225
équations aux dérivées partielles, 223
équations différentielles, 3, *voir* chapitre 9
 méthode de Frobénius, 222
 points ordinaires, points singuliers, 222
exponentielle intégrale (fonction), 8

F

filtre, *voir* chapitre 6
 à phase minimale, 160
 et Transformée de Fourier, 46
fonction
 analytique, 95
 causale, 4, 33, 66, 119, 128
 continue, continue par morceaux, 4
 d'erreur, d'erreur complémentaire, 8
 de Green, 225
 de Heaviside, 4, 7
 de transfert, 69, 148
 eulériennes (Bêta, Gamma), 8
 exponentielle intégrale, 8
 localement sommable, 5
 sinus intégral et cosinus intégral, 8
 sommable, de carré sommable, 5, 41, 42, 148,
 196
 tempérée, 5

Index

fonctions de Bessel, *voir* chapitre 7
de première espèce, 165
et modulation de fréquence, 169
modifiée, 166

fonctions de Hankel, 165

fonctions de Neumann, 165

formule de duplication

fonctions eulériennes, 100

formule des compléments

fonctions eulériennes, 99

formule intégrale de Cauchy, 95

Fourier

coefficients de, 7

séries de, 7, 47, 98, 101, 129

transformée de, 41, 100, 128–131, 225, 226

Fresnel

intégrales de, 98

Frobénius

méthode de résolution d'équations différentielles,
222, 225

G

gain complexe, 148

Gamma (fonction eulérienne), 8, 225

H

Hankel

fonction de, 165

transformation de, 174

Heaviside (fonction de), 4, 7

Hermite (polynômes de), 199

Hilbert

espace de, 196

transformée de, 137, 141

I

impulsion de Dirac, 6

inégalité triangulaire, 97

intégrale

de Bromwich-Wagner, 67

de Fresnel, 98

de Riemann, 1

généralisée, 1, 9

J

Jordan (lemmes de), 96

K

Kramers-Kronig (relations de), 128, 151

L

Laguerre (polynômes de), 72, 199

Laplace

équation de, 226, 227

transformée de, 66, 100, 226

largeur d'un signal, 48

Laurent (séries de), 95

Legendre

polynômes de, 198, 199, 203, 218, 225, 227

lemmes de Jordan, 96

ligne de transmission, 70

N

Neumann (fonctions de), 165

O

orthogonalité, *voir* chapitre 8

oscillateur, 69, 70

P

Paley-Wiener (théorème de), 152, 161

paquet d'ondes gaussien, 48

Parseval (relation de), 7, 42, 63, 100, 115, 197

partie principale, 2, 42, 51, 127

peigne de Dirac, 125

transformée de Fourier, 129, 130

Plancherel (relation de), 42, 55, 197

polynômes

de Hermite, 199

de Laguerre, 72, 199

de Legendre, 198, 203

de Tchebychev, 199, 201

porte (fonction), 7

procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, 198

produit de convolution, 9

et distributions, 127

et transformée de Fourier, 42, 44

et transformée de Laplace, 67

produit scalaire, 196

pseudo-fonction, 124

R

relation de Parseval
 et base orthogonale, 197
 et séries de Fourier, 7
 et transformée de Fourier, 42, 63, 100, 115
 relation de Plancherel, 42, 55, 197
 résidus
 calcul des, 96
 théorème des, 96
 Riemann
 fonction zéta de, 2
 intégrale de, 1

S

séries
 critères de convergence, 2
 de fonctions, 3
 de Laurent, 95
 géométriques, 2
 numériques, 2
 séries de Fourier, 7, 11, 47, 98, 101, 143
 coefficients, 7
 et équation différentielle, 224
 et causalité, 153
 et filtre, 149
 et fonctions de Bessel, 170
 et peigne de Dirac, 129
 relation de Parseval, 7
 Shannon (théorème de), 47
 signe (fonction), 7
 sinus cardinal (fonction), 7
 sinus intégral et Cosinus intégral (fonctions), 8

sommable, de carré sommable
 fonction, 5, 41, 42, 148, 196

T

Tchebychev (polynômes de), 199, 201
 tempérée
 distribution, 124
 fonction, 5, 124
 théorème
 de Cauchy, 95
 de la valeur finale, 67
 de la valeur initiale, 67
 de Paley-Wiener, 152, 161
 de Shannon, 47
 des résidus, 96
 transformation de Hankel, 174
 transformation en Z inverse
 et théorème des résidus, 101
 transformée de Fourier, *voir* chapitre 2, 128–131
 des fonctions usuelles, 42
 et équations différentielles, 45, 225, 226
 formules de Plancherel et de Parseval, 42
 inverse, 100
 propriétés, 42
 sinus, cosinus, 44, 46
 transformée de Hilbert, 137
 transformée de Laplace, *voir* chapitre 3
 des fonctions usuelles, 68
 et lignes de transmission, 70
 inverse, 66, 100
 propriétés, 67
 triangle (fonction), 7



Yves Leroyer • Patrice Tesson

MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR

Cet ouvrage se propose d'accompagner l'étudiant en École d'ingénieur ou en Licence de Physique, de Mécanique ou d'EEA dans son assimilation des connaissances en mathématiques de l'ingénieur et dans sa maîtrise des méthodes de calcul.

Dans chaque chapitre, le lecteur trouvera :

- **Un rappel de cours concis**
- **Des énoncés d'exercices et de problèmes**

Ces énoncés, en partie extraits de sujets d'examen, comportent des **questions détaillées et progressives**.

- **Une rubrique « Du mal à démarrer ? »**

Si le lecteur est coincé dans la résolution d'un exercice et avant d'aller voir la solution, des indications lui sont proposées pour l'aider à bien démarrer.

- **Les solutions complètes de tous les énoncés**

Chaque énoncé est intégralement corrigé. Lorsque c'est utile, une rubrique « Ce qu'il faut retenir de cet exercice » propose un **bilan méthodologique**.

YVES LEROYER

est professeur de physique et de mathématiques pour l'ingénieur à l'École Nationale Supérieure d'Électronique, d'Informatique et de Radiocommunications de Bordeaux (ENSEIRB).

PATRICE TESSON

est professeur agrégé de physique appliquée à l'École Nationale Supérieure d'Électronique, d'Informatique et de Radiocommunications de Bordeaux (ENSEIRB).

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE

